

Турнир юных математиков
Тюменской области «ТЮМ_72»

IX—X

Материалы для проведения

Содержание

I	Условия	4
1	IX	5
1.1	4 класс	6
1.1.1	Домино	6
1.1.2	Пенальти	10
1.2	5 класс	12
1.2.1	Домино	12
1.2.2	Пенальти	14
1.3	6 класс	16
1.3.1	Домино	16
1.3.2	Пенальти	18
1.4	7 класс	20
1.4.1	Домино	20
1.4.2	Пенальти	22
2	X	26
2.1	4 класс	27
2.1.1	Домино	27
2.1.2	Пенальти	29
2.2	5 класс	32
2.2.1	Домино	32
2.2.2	Пенальти	35
2.3	6 класс	38
2.3.1	Домино	38
2.3.2	Пенальти	40
2.4	7 класс	43
2.4.1	Домино	43
2.4.2	Пенальти	45
II	Решения	48
3	IX	49
3.1	4 класс	50
3.1.1	Домино	50
3.1.2	Пенальти	57
3.2	5 класс	61
3.2.1	Домино	61
3.2.2	Пенальти	68
3.3	6 класс	73
3.3.1	Домино	73
3.3.2	Пенальти	79
3.4	7 класс	84
3.4.1	Домино	84
3.4.2	Пенальти	91

4	Х	96
4.1	4 класс	97
	4.1.1 Домино	97
	4.1.2 Пенальти	105
4.2	5 класс	110
	4.2.1 Домино	110
	4.2.2 Пенальти	116
4.3	6 класс	121
	4.3.1 Домино	121
	4.3.2 Пенальти	127
4.4	7 класс	132
	4.4.1 Домино	132
	4.4.2 Пенальти	141

I

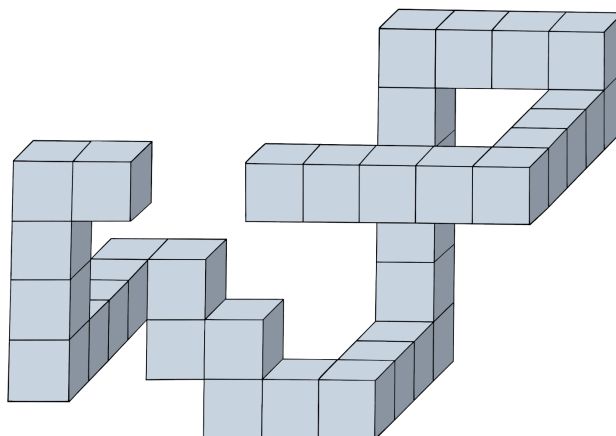
Условия

1 IX

§1.1 4 класс

§1.1.1 Домино

Задача 0-0. Какое минимальное количество кубиков необходимо добавить, чтобы соединить концы фигуры?



Задача 0-1. Продолжите последовательность:

7, 12, 17, 9, 14, 19, ...

В ответ запишите три следующих числа последовательности.

Задача 0-2. Маша проехала на велосипеде 2 км со скоростью 5 м/с. С какой скоростью проехал эту дистанцию Вася, если стартовав на 75 секунд позже Маши, он финишировал на 75 секунд раньше?

Задача 0-3. Разделите число 240 на две части так, чтобы одна часть составляла треть другой части. В ответ запишите числа в порядке возрастания.

Задача 0-4. В каждой клетке квадрата 3×3 лежит монета орлом вверх. Какое наименьшее количество монет нужно перевернуть, чтобы в результате не оказалось трёх монет, расположенных в одной вертикали, одной горизонтали или одной диагонали и лежащих одинаково (то есть все три орлом вверх или все три решкой вверх)?

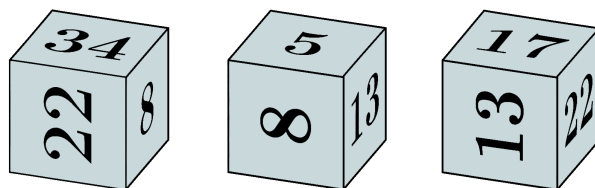
Задача 0-5. Оля задумала четыре целых числа, а затем нашла все их попарные суммы. Пять из них оказались равны 46, 39, 57, 41 и 59. Чему равна шестая сумма?

Задача 0-6. Из 101 далматинца у 29 пятно только на левом ухе, у 17 — только на правом ухе, а у 22 далматинцев нет пятен на ушах. Сколько далматинцев имеют пятно на правом ухе?

Задача 1-1. На машине написано: рассчитана на 5 человек, 400 кг. Разбойник Лёня приписал по одной цифре (большей нуля) перед каждым из двух чисел, но в итоге средний вес человека не изменился. Какие цифры он приписал?

Задача 1-2. На столе лежат три абсолютно одинаковых кубика. Чему равна сумма чисел на гранях, соприкасающихся со столом?

Задача 1-3. Сколько на шахматной доске имеется всевозможных прямоугольников, состоящих из четырёх клеток?

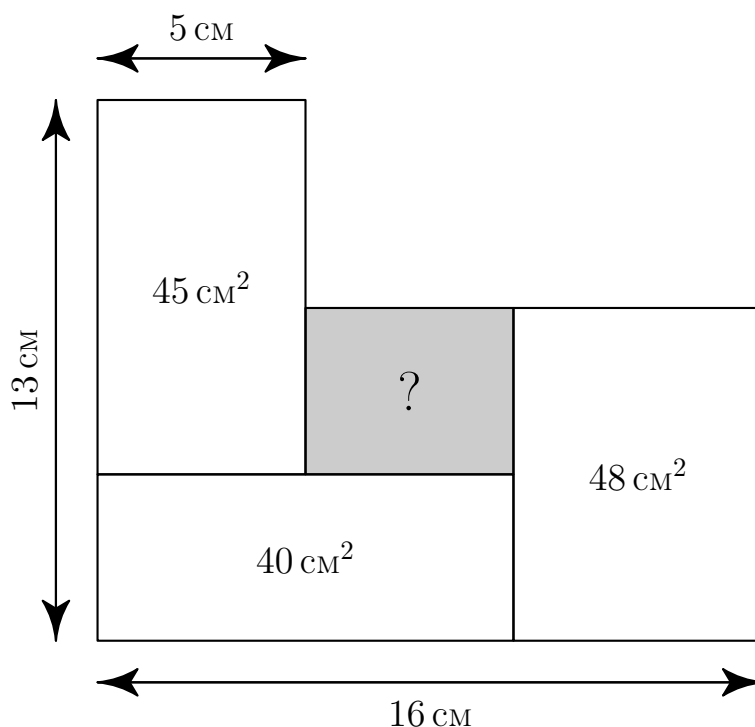


Задача 1-4. В школе открылось 4 кружка. На каждый ходило по 40 человек. На все 4 кружка ходили 20 человек, ровно на 3 — 18, ровно на 2 — 10. Сколько человек ходило только на 1 кружок?

Задача 1-5. В особняке у Анель живут кошки: серых и чёрных — 350 штук, белых и чёрных — 457, серых и белых — 203. Сколько котиков каждого цвета у Анель?

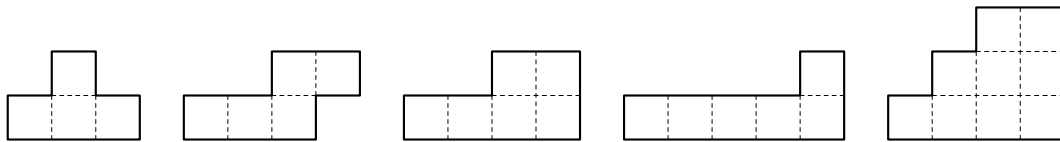
Задача 1-6. 4 школьника пожертвовали приюту 231 тысячу рублей. При этом второй пожертвовал вдвое больше первого, третий — втрое больше второго, четвёртый — вчетверо больше третьего. Сколько тысяч пожертвовал четвёртый?

Задача 2-2. На рисунке изображены четыре прямоугольника. Чему равна площадь прямоугольника, обозначенного знаком вопроса?



Задача 2-3. На доске написаны числа $1, 2, 3, \dots, 10$. Разрешается стереть любые два числа a и b и вместо них написать число $a + b - 1$. Через сколько ходов закончится этот процесс и какое число в итоге останется на доске?

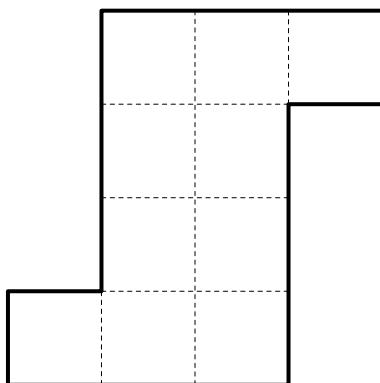
Задача 2-4. Составьте квадрат, используя ровно четыре из пяти изображённых ниже фигур. Каждую из четырёх выбранных Вами фигур можно использовать только один раз.



Задача 2-5. На улицу вышли физики и математики. Каждый из них был либо в сланцах, либо босиком. Физиков было 24, а босых — 16. Обутой математиков оказалось столько же, сколько босых физиков. Сколько всего людей вышло на улицу?

Задача 2-6. Маша хочет разрезать палку на 16 равных частей и отмечает на ней, где нужно сделать разрезы. Алина хочет разрезать эту же палку на 20 равных частей и тоже отмечает на ней, где она должна сделать разрезы. Затем Саша разрезает палку во всех местах, которые отметили девочки. Сколько палок получилось у Саши?

Задача 3-3. Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке, на три части, из которых можно сложить квадрат.



Задача 3-4. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды собралась компания из 41 островитянина, среди которых есть хотя бы один рыцарь и хотя бы один лжец. У каждого из них спросили, сколько всего лжецов в этой компании.

- 3 человека сказали: «Трое»
- 7 человек сказали: «Меньше семи»
- 10 человек сказали: «Меньше десяти»
- 21 человек сказал: «Меньше двадцати одного»

Сколько всего лжецов может быть в этой компании? Укажите все возможные варианты.

Задача 3-5. На шахматной доске стоят ладьи так, что каждая из них бьёт N ладей. При каких N это возможно? (Ладья бьёт в каждом направлении только ближайшую ладью.) Перечислите все варианты.

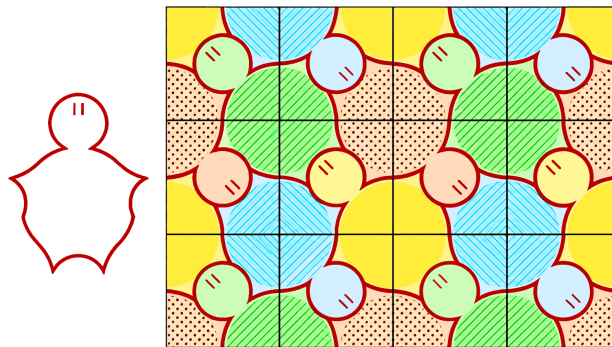
Задача 3-6. Брат однажды сказал сестре: "Сейчас мне вдвое больше лет, чем было тебе тогда, когда мне было столько лет, сколько тебе теперь. Когда же тебе будет столько лет, сколько мне теперь, нам вместе будет 63 года." Сколько лет каждому из них сейчас?

Задача 4-4. Натуральные числа записали в виде пирамиды. Если продолжить её, то какое число будет записано прямо под 122?

1						
2		3	4			
5	6	7	8	9		
10	11	12	13	14	15	16

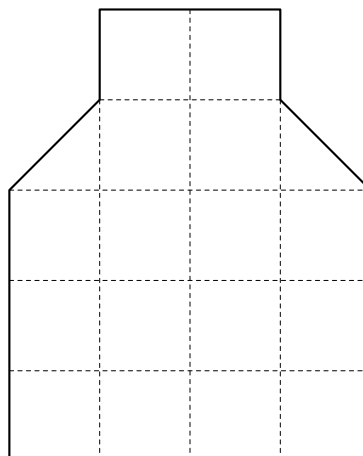
Задача 4-5. Сколько различных трёхзначных чисел, не кратных 5, можно составить из цифр 2, 4, 5, 7, 0? (Цифры в числах могут повторяться.)

Задача 4-6. Если из квадратных плиток, которые отличаются только расцветкой, сложить прямоугольник 3×4 , как на рисунке, то целиком в нём поместится 6 черепашек. А сколько черепашек поместится целиком в составленном таким же образом прямоугольнике 40×41 ?



Задача 5-5. Найдите наибольшее натуральное число, в котором все цифры различны, а при сложении всяких двух соседних цифр получается простое число. (Простое число — это натуральное число, которое делится только на единицу и на самого себя.)

Задача 5-6. Разрежьте фигуру ниже на 4 части одинакового периметра так, чтобы любые две части были не равны между собой.



Задача 6-6. Гриша становится добрым, когда съедает три конфеты разного вида. Какое наибольшее количество дней Гриша может оставаться добрым, если у него есть 15 Твиксов, 45 Кит-катов, 60 Сникерсов и 70 Баунти?

§1.1.2 Пенальти

Задача 1. Егор разрезал листок на квадрат и прямоугольник: площадь квадрата 8100 мм^2 , периметр прямоугольника 320 мм . Найдите длину и ширину листка, ответ запишите в см.

Задача 2. Двоечник Денис на доске в строчку писал плюсы и минусы, чередуя их. Расстояние между двумя минусами — 30 мм , расстояние между плюсом и минусом — 15 мм . Сколько сантиметров между первым и последним нарисованным знаком, если известно, что первый написанный знак — это плюс, а всего в строчке было написано 24 минуса и 25 плюсов.

Задача 3. Даша дома в шкатулке хранила поровну серебряных и золотых колец. Волшебник превратил каждое серебряное кольцо в семь серых бабочек, а каждое золотое — в двух жёлтых бабочек. Бабочек оказалось больше 60 . Какое наименьшее число серебряных колец могло лежать в шкатулке?

Задача 4. Нарисуйте 6 точек и соедините их отрезками так, чтобы из каждой точки выходило три отрезка и никакие отрезки не пересекались.

Задача 5. Сколько сейчас времени, если до конца суток осталось три пятых того, что уже прошло от начала суток?

Задача 6. Новая шахматная фигура «старый король» бьёт только соседние по горизонтали и вертикали клетки. Какое максимальное количество «старых королей» можно расположить на шахматной доске? Дайте ответ и пример.

Задача 7. У Маши в кошельке 1000 рублей. На рынке 3 картошки и 2 морковки стоят 231 рубль, а 5 картошек и 4 морковки стоят 407 рублей. Сколько овощей купила Маша, если известно, что морковки и картошки она купила поровну, а также потратила максимальное количество денег.

Задача 8. Сумма 7 последовательных чисел равна 119 . Найдите наименьшее из этих чисел.

Задача 9. Лиля задумала целое число. Анель умножила его не то на 5 , не то на 6 . Даша прибавила к результату не то 6 , не то 7 . Катя отняла от результата не то 7 , не то 8 . В итоге получилось число 84 . Какое число задумала Лиля? Дайте все варианты ответа.

Задача 10. Представьте число 2025 как сумму двух палиндромов, каждый из которых больше 10 . (Палиндром — это натуральное число, которое одинаково читается справа налево и слева направо. Например, 0 , 989 , 5115 .)

Задача 11. Паша написал на доске последовательно несколько натуральных чисел, каждое из которых отличается от предыдущего либо в 9 раз, либо на 10 . Сумма всех выписанных чисел равна 199 . Какое наименьшее количество чисел мог выписать Паша? Приведите ответ и пример.

Задача 12. Клетки доски 2×13 покрашены в чёрный и в белый цвета так, что каждая белая клетка граничит по стороне хотя бы с одной чёрной клеткой. Какое наибольшее количество белых клеток может быть на доске? Дайте ответ и пример.

Задача 13. Отрезок, длина которого 2025 см , разделили на 2 части. Чему равно расстояние между серединами этих частей?

Задача 14. Какова первая цифра в наименьшем натуральном числе, сумма цифр которого равна 2024 ?

Задача 15. Каждый день Егор записывает в тетрадь различные числа. В первый день он записал числа 1 и a , во второй — a , b и 3, в третий — 2, 4 и c , в четвёртый — a , b и 4, а в последний — четыре числа a , b , c , e . Известно, что всё, что он написал в первый день, было написано и в четвёртый, а всё, что он написал со второго по четвёртый день (включительно), можно было увидеть в тетради в последний день. Найдите, чему равны числа a , b , c , e .

Задача 16. Из пункта A в пункт B одновременно выезжает грузовик со скоростью 80 км/ч и автомобиль со скоростью 100 км/ч. Через некоторое время вслед за ними выехал мотоцикл со скоростью 200 км/ч, который сначала обогнал грузовик, а через полчаса после этого — автомобиль. Сколько проехал автомобиль до того, как его обогнал мотоцикл?

§1.2 5 класс

§1.2.1 Домино

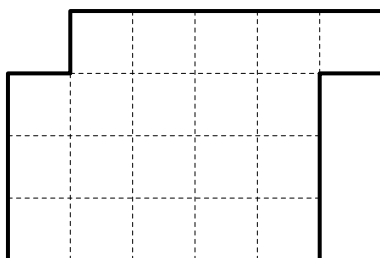
Задача 0-0. У моторной лодки бака хватает на 40 км против течения или на 60 км по течению. На какое максимальное расстояние она может отплыть, чтобы вернуться в изначальное положение?

Задача 0-1. Разрежьте доску 5×6 на 8 вертикальных и 7 горизонтальных доминошек

Задача 0-2. Решите данный ребус (различные буквы — это различные цифры):

$$\text{ПАС} + \text{УДАР} = \text{ГООООООЛ}.$$

Задача 0-3. Егор разрезал приведённую ниже фигуру по линиям сетки на 5 равных по площади фигур. Оказалось, что среди этих фигур нет равных. Покажите, как это возможно.



Задача 0-4. Найдите наименьшее натуральное число с суммой цифр 2025.

Задача 0-5. Сколькими способами можно представить число 50 в виде суммы двух чётных положительных целых чисел? (Представления, различающиеся порядком слагаемых, считать совпадающими.)

Задача 0-6. Решите данный ребус (различные буквы — это различные цифры):

$$\text{ДУРАК} + \text{УДАР} = \text{ДРАКА}.$$

Задача 1-1. Задумано трёхзначное число, у которого с любым из чисел 564, 234 и 569 совпадает один из разрядов, а два других не совпадают. Какое число задумано?

Задача 1-2. Анатолий выбрал несколько чисел из набора от 1 до 13 и разбил их на 2 группы с равной суммой. Определите наибольшее значение этой суммы.

Задача 1-3. Найдите сумму $1^3 + 2^3 + \dots + 9^3$.

Задача 1-4. Дана доска 5×5 , приведите такой пример пути шахматного коня, при котором он побывает в каждой клетке ровно по 1 разу. Вы можете сами выбрать изначальную позицию коня.

Задача 1-5. Найдите такое наименьшее натуральное число $n > 10$, что квадрат суммы цифр числа n равняется n .

Задача 1-6. Возраст Ивана 2025 лет 2025 месяцев 2025 недель 2025 дней 2025 часов. Сколько полных лет Ивану, если считать, что в году ровно 360 дней, в каждом месяце ровно 30 дней, в каждом дне ровно 24 часа?

Задача 2-2. Расставьте по кругу числа 14, 27, 36, 57, 178, 467, 590, 2345 так, чтобы любые два соседних числа имели общую цифру.

Задача 2-3. Про цифры a и b известно, что

$$\frac{a}{b} = b + \frac{a}{10}.$$

Найдите любую подходящую под условие пару a и b .

Задача 2-4. У каждого из тридцати шестиклассников есть одна ручка, один карандаш и одна линейка. После их участия в олимпиаде оказалось, что 26 учеников потеряли ручку, 23 — линейку и 21 — карандаш. Найдите наименьшее возможное количество шестиклассников, потерявших все три предмета.

Задача 2-5. Покрасьте 33 клетки квадрата 7×7 , соблюдая правило: каждая следующая закрашенная клетка должна соседствовать с предыдущей закрашенной клеткой, но не должна соседствовать ни с одной другой ранее закрашенной клеткой.

Задача 2-6. Какое наибольшее количество ферзей можно расставить на шахматной доске 8×8 так, чтобы они не били друг друга? В качестве ответа приведите пример расстановки, содержащий наибольшее количество ферзей.

Задача 3-3.

$$2025 = (20 + 25)^2.$$

Это красивое свойство нынешнего года (в какое прекрасное время мы живём). Квадрат суммы чисел, образованных из первой и второй половин числа (без перестановки цифр), равен исходному числу. Найдите ближайший в будущем год с таким же свойством.

Задача 3-4. У торговца есть 81 монета, одна из которых фальшивая и легче остальных. Есть чашечные весы. Найдите минимальное число взвешиваний, гарантирующих обнаружение фальшивой монеты.

Задача 3-5. В однокруговом шахматном турнире участвовали 30 шахматистов (победа — 1 очко, ничья — 0,5 очка, поражение — 0 очков). Разряд присвоен тем, кто набрал не менее 60% возможных очков. Какому наибольшему числу шахматистов могли присвоить разряд?

Задача 3-6. В ряд выписаны девять девяток. Расставьте между ними знаки плюс, минус или умножение так, чтобы результат был равен 2025.

Задача 4-4. В классе 7 мальчиков и k девочек. Каждый мальчик дружит хотя бы с 7 девочками, а каждая девочка — не более чем с 4 мальчиками. Найдите наименьшее возможное k .

Задача 4-5. Как, не отрывая карандаша от бумаги, провести шесть отрезков так, чтобы зачеркнуть все 16 точек в узлах квадратной сетки 4×4 ?

Задача 4-6. В Древней Руси в морской бой играли по-другому. Корабль имеет форму креста из пяти клеток: центральная и четыре соседние по стороне. Какое минимальное число выстрелов нужно сделать на поле 5×5 , чтобы гарантированно попасть в такой корабль?

Задача 5-5. В шахматном турнире участвовали 8 человек, и в итоге они набрали разное количество очков (каждый играл с каждым один раз, победа — 1 очко, ничья — 0,5 очка, поражение — 0). Шахматист, занявший второе место, набрал столько же очков, сколько четверо последних набрали вместе. Как сыграли между собой шахматисты, занявшие третье и седьмое места?

Задача 5-6. Из доски 8×8 вырезали одну клетку и оставшуюся доску удалось разрезать на полоски 1×3 . Какая клетка могла быть вырезана? Укажите все варианты. В ответ нарисуйте картинку со всеми возможными такими клетками.

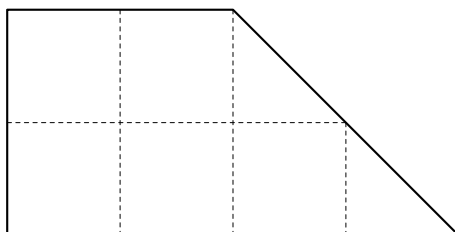
Задача 6-6. Найдите наименьшее натуральное число, которое состоит из чётного количества цифр, стоящих строго в возрастающем порядке, делящееся на 11 (в числе 12 цифры стоят в строго возрастающем порядке, а, например, в числе 22 — нет).

§1.2.2 Пенальти

Задача 1. В первой кучке 52 камня, что на 12 камней меньше, чем во второй кучке, а в третьей кучке на 19 камней больше, чем в первой. Сколько всего камней в трёх кучках?

Задача 2. В команде мальчиков в шляпе столько же, сколько девочек без шляп. Кого в команде больше — мальчиков или людей без шляп?

Задача 3. Разрежьте данную фигуру на 4 равные части. Резать можно не обязательно по сторонам сетки. В качестве ответа нарисуйте искомое разрезание.



Задача 4. Сколько существует способов расставить максимальное число коней на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга? (Способы, полученные поворотом доски, считаются одинаковыми.)

Задача 5. На ТЮМ_72 дети решают задачи в команде из 6 человек. Каждую команду посадили за отдельный круглый стол. Дети меняются местами со своим соседом раз в минуту. За какое наименьшее число пересадок каждый ребёнок сможет побывать на всех местах?

Задача 6. Восстановите лабиринт 5×5 по числам, показывающим минимально возможное количество шагов до выхода из каждой клетки. Изначально стены лабиринта проходили по линиям сетки.

6	17			16
	11		21	

Задача 7. Назовём фигуру Мамонт, если она может ходить только вправо или вверх на 1 клетку. Сколько у Мамонта есть способов попасть из левого нижнего угла доски 5×5 в правый верхний, если ему нельзя находиться выше главной диагонали.

Задача 8. Есть 9 кучек монет: в первой 1 монета, во второй 2 монеты, в третьей — 3 и т.д. Настоящая монета весит 100 граммов, фальшивая — 101 грамм. Если хотя бы одна монета из кучки фальшивая, то и все остальные монеты из кучки будут фальшивые, причём эта кучка с фальшивыми монетами всего одна. За какое минимальное количество взвешиваний на цифровых весах можно определить все фальшивые монеты?

Задача 9. За круглым столом сидят 2025 человек. Каждый может быть рыцарем (всегда говорит правду) или лжецом (всегда лжёт). Каждому из них задали вопрос: "Среди твоих соседей ровно 1 рыцарь?" и каждый ответил "Да". Сколько могло сидеть рыцарей за столом?

Задача 10. Дан клетчатый квадрат 4×4 . Егор разрезал его по линиям сетки на 4 равные по площади части. Могли ли у него получиться 4 различных многоугольника? Если можно, то покажите как. (Многоугольники считаются одинаковыми, если они совпадают при повороте.)

Задача 11. Сколько существует трёхзначных чисел, в которых цифры идут в неубывающем порядке?

Задача 12. Найдите наибольшее число из различных цифр, где любые две соседние цифры образуют простое число (например, в числе 179 рассматриваются числа 17 и 79).

Задача 13. На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 125. Разрешается стереть любые два числа a и b , а вместо них записать число $(a + b - 1)$. Какое число останется на доске после 124 таких операций?

Задача 14. Решите уравнение в различных натуральных числах

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} = 1.$$

Найдите хотя бы одно значение $a + b$.

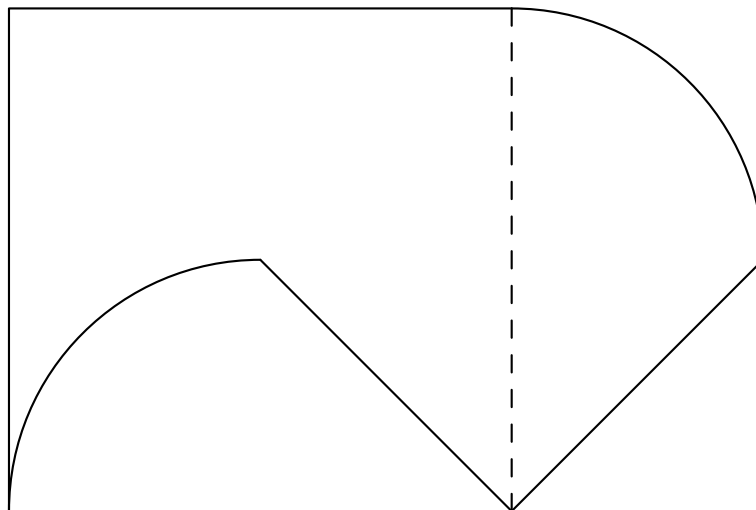
Задача 15. В каждой клетке квадрата 3×3 стоит «проверяющий». Каждый «проверяющий» может быть либо рыцарем (всегда говорит правду), либо лжецом (всегда лжёт). Каждый «проверяющий» заявил, что все его соседи по стороне клетки — лжецы. Какое максимальное количество рыцарей может быть среди «проверяющих»?

Задача 16. Егор всегда лжёт, а Рома всегда говорит правду. Какой вопрос надо было бы им задать, чтобы они дали на него одинаковые ответы?

§1.3 6 класс

§1.3.1 Домино

Задача 0-0. На рисунке показано, как фигуру разрезать на 2 части, из которых можно сложить квадрат. Разрежьте эту фигуру другим способом на 2 части так, чтобы из них можно было сложить квадрат.



Задача 0-1. Представьте число 2025 в виде суммы нескольких различных делителей числа 2024.

Задача 0-2. Пусть $L(N)$ — количество букв в написании числа N . Чему равно $L(L(L(2025)))$? (Например, 6 — Ш, Е, С, Т, Ъ, 5 букв, поэтому $L(6) = 5$.)

Задача 0-3. Найдите какие-нибудь три натуральных числа a , b , c таких, что:

$$a^3 + b^3 + c^3 = (abc)^2.$$

Задача 0-4. В футбольном турнире из пяти команд по системе 3-1-0 победитель набрал столько очков, сколько все остальные вместе взятые. Сколько ничьих было в этом турнире?

Задача 0-5. С 1 сентября четыре школьника начали посещать кинотеатр. Первый бывал в нем каждый четвёртый день, второй — каждый пятый, третий — каждый шестой и четвёртый — каждый девятый. Когда второй раз все школьники встретятся в кинотеатре?

Задача 0-6. Назовём натуральное число k «красивым», если оно делится на первые $\frac{k}{72}$ ($\frac{k}{72}$ — натуральное число) простых чисел. Найдите все такие числа.

Задача 1-1. В Чемпионате России по шахматам каждый играет с каждым один раз. Сколько партий, если участников 18?

Задача 1-2. Найдите наибольшее шестизначное число $\overline{\text{ФМШЛАВ}}$, в котором разные буквы обозначают разные цифры и

$$\text{Ф} \cdot \text{М} \cdot \text{Ш} = \text{Л} \cdot \text{А} \cdot \text{В}.$$

Задача 1-3. Решите ребус:

$$\overline{ABC} + \overline{AC} + \overline{A} = \overline{BCC},$$

где разным буквам соответствуют разные цифры.

Задача 1-4. Какое наибольшее число ладей можно расставить на шахматной доске так, чтобы каждая была не более трёх других?

Задача 1-5. Чему равен угол между часовой и минутной стрелками в 3 часа 14 минут? Ответ дайте в градусах.

Задача 1-6. Тридцать школьников, шестиклассников и семиклассников, обменялись рукопожатиями. При этом оказалось, что каждый шестиклассник пожал руку восьми семиклассникам, а каждый семиклассник пожал руку семи шестиклассникам. Сколько было шестиклассников и семиклассников?

Задача 2-2. Можно ли изобразить на плоскости девять отрезков так, чтобы каждый пересекал ровно три других? (При положительном ответе приведите пример.)

Задача 2-3. Закрасьте несколько клеток в таблице 9×9 так, чтобы во всех столбцах было равное количество закрашенных клеток, а во всех строках — различное.

Задача 2-4. Найдите семь различных натуральных чисел, сумма которых делится на любое из них, и при этом она меньше 50.

Задача 2-5. Все натуральные числа с суммой цифр 2025 упорядочили по возрастанию. Найдите 226-е число в этом ряду.

Задача 2-6. Вася задумал трёхзначное натуральное число. Он посчитал остатки при делении этого числа на 2, 4, 6, 8, 10, 12 и сложил их. У него получилось 36. Какое число мог задумать Вася? (Приведите все примеры.)

Задача 3-3. В турнире по футболу участвуют 52 команды. Команда выбывает после второго поражения. Турнир продолжается, пока не останется одна команда. Сколько может быть сыграно матчей? Укажите все варианты.

Задача 3-4. На столе лежат 5 красных, 25 синих и 1 зелёная карточка (цвет не виден). Какое наименьшее число карточек нужно перевернуть, чтобы среди них наверняка было разное количество красных, синих и зелёных?

Задача 3-5. У Серёжи и Лены есть несколько шоколадок, каждая весом не более 100 г. Как бы они ни разделили шоколадки, у одного из них суммарный вес не будет превосходить 100 г. Каков наибольший возможный общий вес всех шоколадок?

Задача 3-6. Сколько среди дробей

$$\frac{50}{2}, \frac{49}{3}, \dots, \frac{2}{50}$$

сократимых?

Задача 4-4. В ребусе

$$\text{ТЮМ} + \text{ТЮМ} + \text{ТЮМ} + \dots + \text{ТЮМ} = \text{ТЮМЕНЬ}$$

одинаковые буквы заменяют одинаковые цифры, разные буквы заменяют разные цифры. Часть одинаковых слагаемых заменена многоточием. Сколько всего может быть ТЮМов, чтобы ребус имел решение? Найдите наименьшее и наибольшее количества.

Задача 4-5. Волейбольная сетка имеет вид прямоугольника размером 50×600 клеток. Какое наибольшее число верёвочек можно перерезать так, чтобы сетка не распалась на куски?

Задача 4-6. В стране рыцарей (всегда говорят правду) и лжецов (всегда лгут) за круглым столом сидят в вершинах правильного десятиугольника 10 человек, среди которых есть лжецы. Путешественник может встать в любую точку и спросить каждого: "Каково расстояние от меня до ближайшего лжеца среди вас?" После этого каждый отвечает ему. Какое минимальное количество вопросов должен задать путешественник, чтобы гарантированно узнать всех лжецов?

Задача 5-5. Листочки с числами от 1 до 50 разбили на десять равных групп и в каждой группе выбрали среднее по величине число. Какова наименьшая возможная сумма выбранных чисел?

Задача 5-6. В ряд стоят 1999 чисел. Первое число равно 1. Известно, что каждое число, кроме первого и последнего, равно сумме двух соседних. Найдите последнее число.

Задача 6-6. Найдите какие-нибудь три положительных различных рациональных числа x , y , z таких, что:

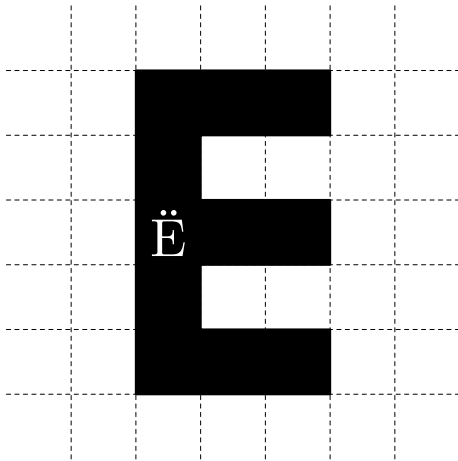
$$(x + y + z)^6 = xyz.$$

§1.3.2 Пенальти

Задача 1. На доске написана пара чисел $(1, 1)$, за один ход можно заменить пару (x, y) на $(x + y, x)$ или на пару $(2x + y + 1, x + y + 1)$. Через несколько ходов на доске оказалась пара, в которой есть число 7. Какая пара записана на доске? (Укажите все варианты ответов.)

Задача 2. Петя захотел рассчитаться за кисть винограда стоимостью 20 рублей, у него в карманах лежало много монет по 2, 5 и 7 рублей. Сколькими способами он может приобрести желаемое без сдачи?

Задача 3. Введём новую шахматную фигуру — «ёж». Он бьёт как показано на рисунке (и только в этом направлении). Какое наибольшее количество не бьющих друг друга «ежей» можно расставить на доске 6×6 ? (Укажите ответ и пример.)



Задача 4. Укажите число, в десятичной записи которого нет 0, при этом оно делится на 45, его сумма цифр делится на 45 и произведение его цифр также делится на 45. (Десятичная запись числа — привычная нам форма записи чисел цифрами от 0 до 9, причём числа не начинаются с нуля.)

Задача 5. У Пети есть 4 палочки. Самая короткая имеет длину 2, следующая — длину 2,5. Известно, что ни из каких трёх палочек нельзя составить треугольник. Какая наименьшая

возможная сумма длин двух самых длинных палочек? (Из 3 отрезков можно составить треугольник тогда и только тогда, когда сумма длин любых двух из этих отрезков больше длины третьего.)

Задача 6. Кубик окрасили, а потом распилили на 27 одинаковых кубиков. Во сколько раз общая площадь неокрашенной поверхности этих кубиков больше общей площади их окрашенной поверхности?

Задача 7. Винни-Пух, Сова, Кролик и Пятачок съели 70 бананов, причём каждому досталось хотя бы по одному банану. Винни-Пух съел больше, чем каждый из остальных; Сова и Кролик вместе съели 45 бананов. Сколько бананов съел Пятачок?

Задача 8. Квадрат со стороной 10 разрезан по линиям сетки на 10 прямоугольников одинакового периметра. Найдите максимальное возможное значение периметра.

Задача 9. На доске написаны числа $1, 2, 3, \dots, 125$. Разрешается стереть любые два числа a и b и вместо них записать число $a + b - 1$. Какое число останется на доске после 124 таких операций?

Задача 10. Найдите какое-нибудь решение ребуса

$$\text{СУК} \cdot \text{СУК} = \text{БАРСУК}$$

(разные буквы — разные цифры).

Задача 11. Найдите сумму цифр числа

$$6 + 66 + 606 + \dots + \underbrace{60\dots06}_{88}.$$

Задача 12. На шахматную доску поставили четыре короля, не бьющих друг друга. Какое наибольшее количество королей ещё можно гарантированно поставить на доску так, чтобы все поставленные короли не били друг друга?

Задача 13. У скольких 2023-значных чисел произведение цифр равно 2023?

Задача 14. Сколько существует различных прямоугольников с целочисленными сторонами и периметром 2026?

Задача 15. Первая цифра четырёхзначного числа равна остатку от деления числа на 2, вторая — на 3, третья — на 4, четвёртая — на 5. Найдите все такие числа.

Задача 16. В ТЮМляндии все номера телефонов начинаются на 690 и состоят из 10 различных цифр. Какое наибольшее количество номеров телефонов в ТЮМляндии может делиться на 15?

§1.4 7 класс

§1.4.1 Домино

Задача 0-0. Найдите все натуральные n , для которых $n^3 + 3n + 2$ делится на $n^2 + n + 1$.

Задача 0-1. Назовём четырёхзначное число «гармоничным», если все его цифры делятся на 4. Найдите количество «гармоничных» чисел.

Задача 0-2. На лужайке жили 35 гусениц и куколок. После того, как 8 куколок стали бабочками и улетели, а 2 гусеницы стали куколками, гусениц стало вдвое больше, чем куколок. Сколько гусениц и сколько куколок жило на лужайке вначале?

Задача 0-3. Расставьте в равенстве $8\ 8\ 8\ 8 = 5\ 5\ 5$ знаки арифметических действий так, чтобы равенство стало верным. (Скобки использовать нельзя.)

Задача 0-4. Представьте число 2025 как сумму двух палиндромов, каждый из которых больше 10. Палиндромы — это натуральные числа, которые одинаково читаются справа налево и слева направо. (Например, 0, 989, 5115.)

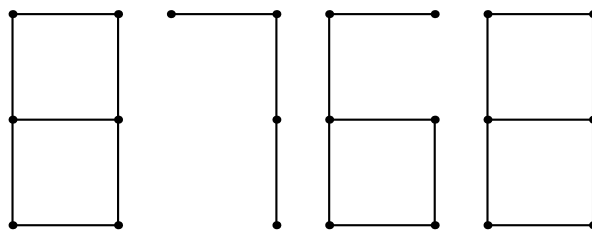
Задача 0-5. У Пети есть 4 палочки. Самая короткая имеет длину 2, следующая — длину 2,5. Известно, что ни из каких трёх палочек нельзя составить треугольник. Какая наименьшая возможная сумма длин двух самых длинных палочек?

Задача 0-6. В прямоугольном треугольнике ABC к его гипотенузе AB провели медиану CM . На продолжении BC за точку C отметили точку D так, что угол CMD оказался в два раза меньше угла ABC . Найдите длину отрезка CD , если $AB = 20$.

Задача 1-1. Маринетт испекла макаруны (не меньше 8 штук) и поняла, что какие бы 8 макарун она бы не съела, она точно съест 4 миндальных и 2 кокосовых. Какое количество макарун она могла испечь? Миндальные кокосовыми не бывают.

Задача 1-2. Дана доска 5×5 , приведите пример пути шахматного коня, такой, что он побывает в каждой клетке ровно по 1 разу. Вы можете сами выбрать изначальную позицию коня.

Задача 1-3. Переложите ровно три спички так, чтобы получилось наименьшее возможное четырёхзначное число.



Образец цифр:

Задача 1-4. Даня задумал число, затем умножил его на сумму цифр этого числа. В итоге получилось 792. Какое это могло быть число? Найдите все варианты.

Задача 1-5. Решите в натуральных числах уравнение

$$a = \underbrace{d(d(\dots(d(a))\dots))}_{\text{повторяется } a \text{ раз}},$$

где $d(a)$ — количество делителей числа a .

Задача 1-6. Расставьте вместо решёток цифры так, чтобы равенство стало верным:

$$(\# \cdot \# + \#)(\# \cdot \# + \#)(\# \cdot \# - \#) = 2023.$$

Задача 2-2. В числе 6437051928 вычеркните ровно пять цифр, чтобы оставшееся пятизначное число было максимально возможным. В ответе запишите полученное число.

Задача 2-3. За один ход можно вычесть по 1 из двух соседних по стороне клеток. За сколько ходов можно получить из левой картинке правую?

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1	0	1
0	1	0
1	0	1

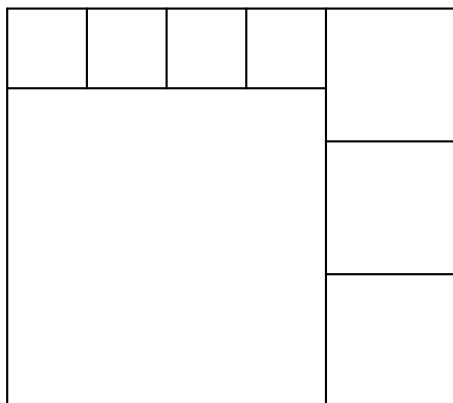
Задача 2-4. Имеются четыре числа, сумма которых равна 4. Известно, что сумма любых трёх из них неотрицательна. Какое наименьшее значение может принимать наименьшее из этих чисел?

Задача 2-5. Натуральные числа $1, 2, 3, \dots, 1000$ разбили на группы $1, 2, 3, \dots, 10; 11, 12, 13, \dots, 20; \dots; 991, 992, 993, \dots, 1000$ (по 10 чисел в каждой группе). Найдите количество групп, в которых есть ровно 2 числа, делящихся на 7.

Задача 2-6. Найдите наименьшее натуральное x такое, что x^2 оканчивается на 9009.

Задача 3-3. Найдите наименьшее натуральное число, кратное и 31, и 3, начинающееся при этом с 2024.

Задача 3-4. Прямоугольник разрезан на восемь квадратов. Площадь среднего по размеру квадрата равна 100. Чему равна площадь исходного прямоугольника?



Задача 3-5. Назовём натуральное число k «резаным», если оно делится на первые $\frac{k}{72}$ ($\frac{k}{72}$ — натуральное число) простых чисел. Найдите все такие числа.

Задача 3-6. Найдите наибольшее натуральное число, в записи которого все цифры различны и сумма любых двух из них является составным числом.

Задача 4-4. У Лёни есть 100 носков: чёрные, красные, зелёные и полосатые. Оказалось, что среди любых 85 носков обязательно есть носки всех четырёх раскрасок. Среди какого наименьшего количества носков наверняка встретятся носки хотя бы трёх раскрасок?

Задача 4-5. Из набора натуральных чисел от 1 до n удалили ровно 5 чисел, и оказалось, что не осталось таких троек различных чисел, что произведение двух из них равно третьему. При каком наибольшем n это возможно?

Задача 4-6. Вася записал числа $1, 2, \dots, 100$ на пятидесяти карточках, на каждой стороне каждой карточки — по числу. Затем он выложил карточки на стол. Петя видит лишь верхние числа; он может выбрать любой набор карточек и перевернуть их. Он выиграет, если после этого сумма чисел на верхних сторонах карточек будет не меньше k . При каком наибольшем k Петя гарантированно может выиграть?

Задача 5-5. На окружности отмечено 200 точек. Назовём 72-дугой набор из 72 подряд отмеченных точек. Какое наибольшее количество 72-дуг могут попарно пересекаться?

Задача 5-6. Сколько решений имеет ребус

$$T \cdot Y \cdot M = E \cdot H \cdot B$$

(разные буквы соответствуют разным цифрам)?

Задача 6-6. Про различные числа a, b, c известно, что:

$$2025(a-b)(b-c)(c-a) = (a+b)(b+c)(c+a).$$

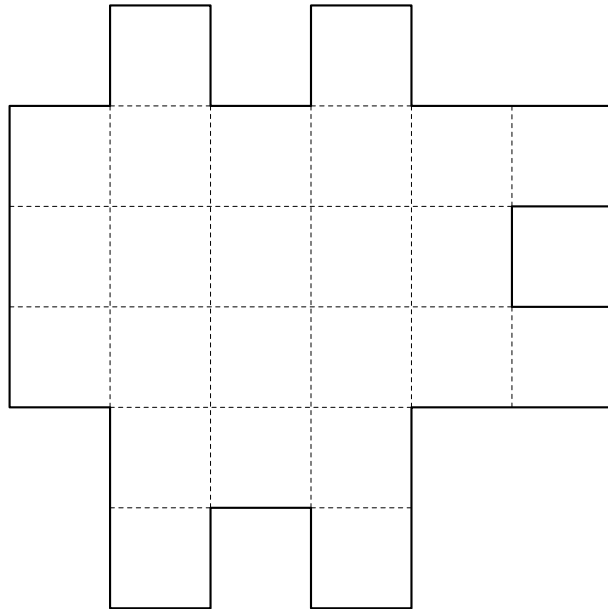
Чему может быть равно выражение

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}?$$

§1.4.2 Пенальти

Задача 1. k команд проводят отборочный турнир по следующим правилам: изначально в каждой команде по 3 человека; в одном матче участвуют две команды с одинаковым числом участников; победившая команда забирает участника из проигравшей команды. Если в команде остаётся 1 или 5 человек, то она выходит из турнира. Турнир заканчивается, когда никакие две оставшиеся команды не могут сыграть по правилам. Какое число команд может не выйти из турнира?

Задача 2. Разрежьте данную фигуру на 4 равных части:



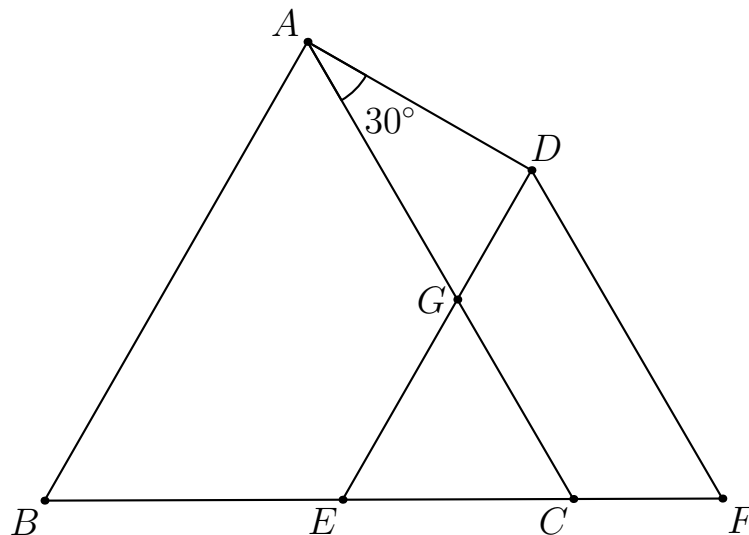
Задача 3. Найдите 72-ю цифру после запятой у дроби $\frac{703}{1998}$.

Задача 4. Приведите пример различных целых a, b, c таких, что

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{3c} = a + 2b + 3c.$$

Задача 5. Назовём число «спартанским», если в нём содержится ровно одна цифра «3» и ровно две цифры «0». Найдите количество «спартанских» чисел от 1 до 10000.

Задача 6. Равносторонние треугольники ABC и DEF со сторонами 4 и 3 расположены как на рисунке. Найдите длину отрезка GE .



Задача 7. За круглый стол сели 100 школьников: мальчики и девочки. Школьник, у которого оба соседа того же пола, что и он сам, говорит правду, а иначе он лжёт. Каждый школьник произнёс следующую фразу: "Среди моих соседей ровно один говорит правду". Сколько детей солгали? Найдите все варианты.

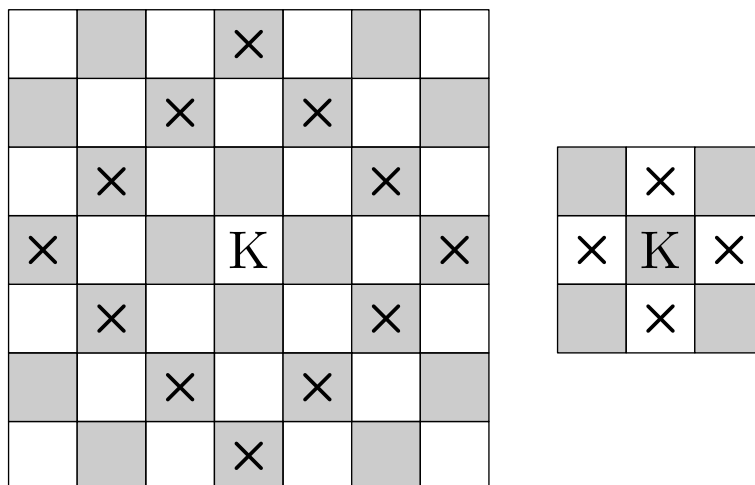
Задача 8. Мальчики и девочки ели конфеты, причём мальчиков было больше, чем девочек. Каждый съел по 5 конфет. Известно, что мальчики могли бы съесть все конфеты сами, разделив между собой поровну. Девочки тоже могли бы. Сколько в этом случае досталось бы каждой девочке?

Задача 9. Кирилл Сергеев из 4А класса и 19 его друзей из той же школы отправились в поход. Оказалось, что среди любых пяти из этих туристов обязательно есть одноклассники, а среди любых восьми — не больше, чем пять одноклассников. Сколько учеников 4А класса пошли в поход?

Задача 10. Сколько значений может принимать выражение

$$T + Y + P + H + I + P + T + Y + M + E + H + B?$$

Задача 11. Женя придумала шахматную фигуру «капибара». «Капибары» бывают большие и маленькие. Большая «капибара» бьёт на расстоянии трёх клеток, а маленькая бьёт лишь соседние клетки (см. рис). При каком наибольшем N на шахматной доске можно расставить N больших и N маленьких «капибар»?

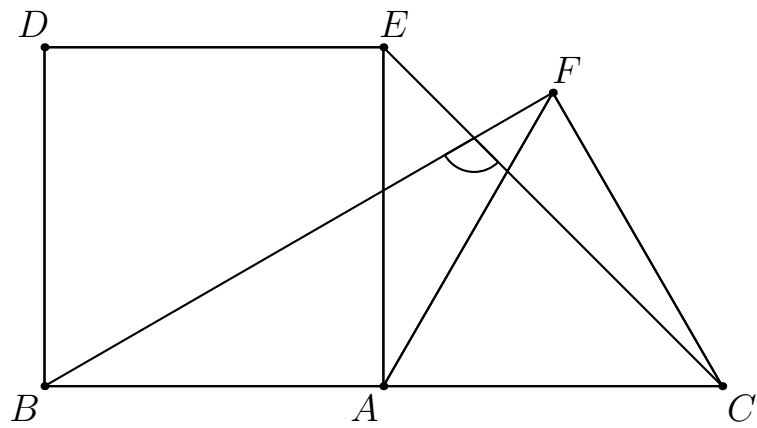


Задача 12. Девятизначное число $\overline{ABCABCBBB}$ делится на все числа от 1 до 17. Чему равны цифры A , B и C ?

Задача 13. Илья выписал первые 10 цифр числа π : 3141592653. Помогите ему зачеркнуть несколько цифр так, чтобы у него получилось наибольшее число, кратное 11. В ответ запишите полученное число.

Задача 14. Пусть $L(N)$ — количество букв в числе N . (Например, $L(17) = 10$.) Найдите $\underbrace{L(L(\dots L(2025)\dots))}_{2025 \text{ раз}}$.

Задача 15. На прямой отмечены точки A , B , C таким образом, что $AB = AC$. В одну полуплоскость от прямой построены квадрат $ABDE$ и правильный треугольник AFC . Найдите угол между прямыми BF и CE .



Задача 16. Пусть a, b, c — натуральные числа, для которых

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}} = 3,14.$$

Найдите $a + b + c$.

2_x

§2.1 4 класс

§2.1.1 Домино

Задача 0-0. Придумайте хотя бы одно решение ребуса

$$\text{КИЙ} + \text{ШАР} = \text{ЛУЗА},$$

где каждой букве соответствует своя цифра, разным буквам — разные цифры.

Задача 0-1. Запишите 7 подряд идущих чётных чисел так, чтобы наименьшее было в 3 раза меньше наибольшего.

Задача 0-2. Натуральное число называется палиндромом, если при выписывании его цифр в обратном порядке оно останется таким же (например, числа 22, 404, 7887 — палиндромы, а 245, 670, 2025 — нет). Представьте число 2026 в виде суммы 3 палиндромов.

Задача 0-3. Пиджак вышел из школы на 10 минут позже Носка, но шёл в 2 раза быстрее. Через какое время он его догонит?

Задача 0-4. На одном острове существует система обмена: 13 медных монет можно обменять на 7 серебряных, и 3 серебряных можно менять на 1 золотую. У мистера Крабса было 156 медных монет, а после обмена остались только золотые монеты. Сколько золотых монет у него стало?

Задача 0-5. В детском саду 28 детей. 15 любят смотреть Лунтика, а 12 — Фиксиков, и 5 человек любят и то, и другое. Сколько детей из этого сада не любят ни один из мультиков?

Задача 0-6. В новогоднем мешке Деда Мороза лежат 30 приставок PS5 и одинаковых наборов Лего. Среди любых 12 подарков имеется хотя бы одна приставка, а среди любых 20 подарков имеется хотя бы один набор Лего. Сколько приставок и сколько наборов Лего в мешке?

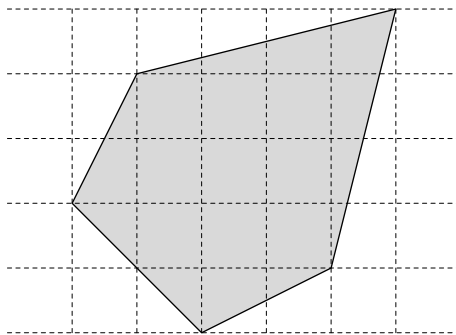
Задача 1-1. Табло электронных часов показывает 17:13. Какое время будут показывать электронные часы в следующий раз, когда сумма часов и минут будет такой же?

Задача 1-2. Сколько существует способов выбрать пару из мальчика и девочки в классе, где всего 5 мальчиков и 5 девочек?

Задача 1-3. Баба Клава по осени очень любит считать урожай. При этом она заметила, что мешок моркови и 2 куля гороха весят, как 9 мешков картошки, а мешок моркови и 6 кулей гороха весят, как 15 мешков картошки. Сколько весят вместе 2 куля гороха и 2 мешка картошки, если мешок картошки весит 10 килограммов?

Задача 1-4. Гена с Чебурашкой нашли ящик, в котором было 25 апельсинов, и решили делить их таким образом: за каждые 10 см роста можно взять один апельсин. Оказалось, что они забрали все апельсины из ящика, и Гене досталось на 15 апельсинов больше. Потом пришла старушка Шапокляк, забрала у Гены половину его апельсинов и теперь у него в два раза больше апельсинов, чем у Чебурашки. Определите рост Гены и рост Чебурашки.

Задача 1-5. Найдите площадь фигуры, изображённой на рисунке. Длина стороны клетки — 1 см.



Задача 1-6. Найдите наибольшее четырёхзначное число, все цифры которого различны, а ещё произведение двух его цифр по краям ровно в 2 раза больше произведения двух цифр в середине.

Задача 2-2. Начертите, пожалуйста, 3 прямые и поставьте на них 6 точек так, чтобы на каждой прямой лежало ровно 3 точки.

Задача 2-3. В Зачарованный Лес привезли весы, и все побежали взвешиваться. Оказалось, что Винни-Пух и Кристофер Робин вместе тяжелее, чем Пятачок и ослик Иа-Иа вместе. А Иа-Иа тяжелее, чем Винни-Пух и Крошка Ру вместе. Кто тяжелее: Пятачок и Крошка Ру вместе или Кристофер Робин?

Задача 2-4. Добрая фея дружит с 48 помощниками, которые должны помочь Авроре и починить 4 иголки у 60 веретён (если они этого не сделают, то Аврора уколется ими и навечно заснёт). У одного веретена нельзя одновременно чинить больше 1 иголки. Через какое наименьшее время Аврору можно будет подпустить к веретёнам, если один помощник чинит одну иголку за 5 минут?

Задача 2-5. Проведите два отрезка с концами на сторонах треугольника так, чтобы треугольник оказался разбит на два треугольника, один четырёхугольник и один пятиугольник.

Задача 2-6. На уроке у Корнея Корнеевича на доске нарисовали квадрат 5×5 . В каждом маленьком квадратике 1×1 Лунтик написал число. Кузя, не смотря на доску, захотел узнать, чему равняется сумма чисел в угловых клетках квадрата, зная, что сумма чисел в каждом уголке равна 12. Чему равняется эта сумма?

Задача 3-3. На данный момент возраст Гринча в 4 раза больше возраста Санты в тот момент, когда он был в 2 раза младше Гринча. Какой возраст у Гринча сейчас, если через 1500 лет их суммарный возраст будет составлять 10000 лет?

Задача 3-4. Гном разложил свои сокровища в 3 сундука разного цвета, стоящие у стены: в один — драгоценные камни, в другой — золотые монеты, в третий — магические книги. Он помнит, что красный сундук находится правее, чем камни, и что книги — правее красного сундука. В каком сундуке лежат книги, если зелёный сундук стоит левее синего?

Задача 3-5. На листе в клетку нарисован прямоугольник 6×7 . Разрежьте его по линиям сетки на 5 каких-нибудь квадратов.

Задача 3-6. Разрежьте прямоугольный лист бумаги размером $8 \text{ см} \times 4 \text{ см}$ на 4 равных части, из которых можно составить квадрат.

Задача 4-4. Назовём число «крутым», если оно состоит из 6 знаков, и сумма его цифр делится на 7. Могут ли сразу два подряд идущих числа быть «крутыми»?

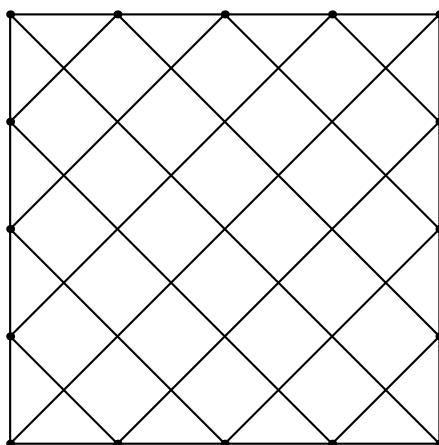
Задача 4-5. Некоторое число обладает таким свойством, что все его соседние цифры образуют двузначное число, нацело делящееся на 23. Какое наибольшее число цифр оно может иметь?

Задача 4-6. Каждое ребро куба окрашено в синий или красный цвет. Из каждой вершины выходит максимум одно ребро синего цвета. Какое наибольшее число синих рёбер может быть в таком кубе?

Задача 5-5. Есть шоколадка 12×12 , играют 10 игроков, ходят по очереди, начинает 1. Каждым ходом можно взять кусок шоколадки и разломить его на 2 прямоугольные части, состоящие из квадратиков 1×1 . Выигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет?

Задача 5-6. Буратино решил перейти улицу максимально медленно, по правилам дорожного движения: он обязан двигаться с постоянной скоростью, вступить на пешеходный переход шириной 20 метров, находящийся в 50 метрах от его начальной позиции, в интервале работы зелёного сигнала, и успеть полностью завершить переход до того, как этот же зелёный свет погаснет. В момент начала движения Буратино светофор для пешеходов как раз переключился на красный цвет, который горит 20 секунд, после чего на 40 секунд включается зелёный. Вычислите наименьшую скорость, с которой он сможет так сделать.

Задача 6-6. Каждую сторону квадрата разделили на 8 равных частей и через каждую точку деления провели ровно две прямые (через вершины по одной), которые параллельны диагоналям квадрата. На какое число частей все проведённые прямые разбили квадрат? В примере изображён квадрат, каждую сторону которого поделили на 4 равные части.

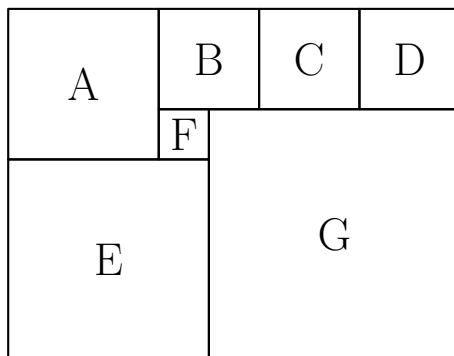


§2.1.2 Пенальти

Задача 1. Расставьте на шахматной доске 5 ладей и 6 слонов так, чтобы никакая фигура не била другую. (Напомним, что ладья ходит по горизонталям и вертикалям на любое расстояние, а слон — только по диагоналям на любое количество свободных полей.) Цвет фигур не важен, любая фигура может бить любую.

Задача 2. На острове живут рыцари (всегда говорят правду) и лжецы (всегда лгут). Однажды собралась компания из 41 островитянина, среди которых есть хотя бы один рыцарь и хотя бы один лжец. У каждого спросили, сколько всего лжецов в этой компании. Трое ответили: «Трое», семеро сказали: «Меньше семи», десять сказали: «Меньше десяти», а двадцать один сказал: «Меньше двадцати одного». Сколько лжецов может быть в компании? Укажите все возможные варианты.

Задача 3. Прямоугольник разрезан на семь квадратов, как изображено на рисунке. Среди них есть квадрат, обозначенный буквой D , и известно, что длина его стороны равна 16. Найдите длины сторон двух других квадратов, которые на рисунке обозначены буквами E и G .



Задача 4. Два рыбака съедают четырёх вармоусов за пять дней. Сколько вармоусов потребуется, чтобы кормить четырёх таких рыбаков в течение месяца (30 дней)?

Задача 5. Незнайка, Знайка и Пончик играли в футбол. Один из них разбил мячом стекло. Когда их спросили, кто это сделал, Незнайка сказал: «Пончик», Пончик сказал: «Знайка», а Знайка ответил: «Не я». Кто разбил стекло, если ровно двое из них сказали правду?

Задача 6. В классе 16 учеников. Учитель выстроил их в ряд, зная, что затем любые 11 могут уйти. Он хочет, чтобы оставшиеся 5 не стояли по росту ни в порядке возрастания, ни в порядке убывания. Сможет ли он этого добиться?

Задача 7. Маша и Медведь едят печенье и пьют чай. Маша выпивает одну кружку чая за целое число секунд, а Медведь — за время, в три раза большее. Маша съедает 5 печений в минуту, а Медведь — 6 печений. Никто из них не может есть и пить одновременно. В некоторый момент оказалось, что они выпили одинаковое количество кружек чая (больше одной) и съели по 7 печений. Сколько кружек чая выпила Маша?

Задача 8. В записи 88888888 между некоторыми цифрами поставьте знаки сложения так, чтобы значение полученного выражения равнялось 1000.

Задача 9. Карамелька, Коржик и Компот учатся на географическом, экономическом и химическом факультетах (все на разных). Если Карамелька — географ, то Компот — не экономист. Если Коржик — не экономист, то Карамелька — географ. Если Компот — не географ, то Коржик — химик. Определите, кто на каком факультете учится.

Задача 10. Какое наибольшее количество месяцев одного года могут иметь по пять пятниц?

Задача 11. В школе обучаются 1200 детей, причём у каждого из них ровно 5 уроков каждый день. На каждый урок приходит ровно 30 детей, и каждый учитель ведёт ровно 4 урока. Сколько учителей в школе?

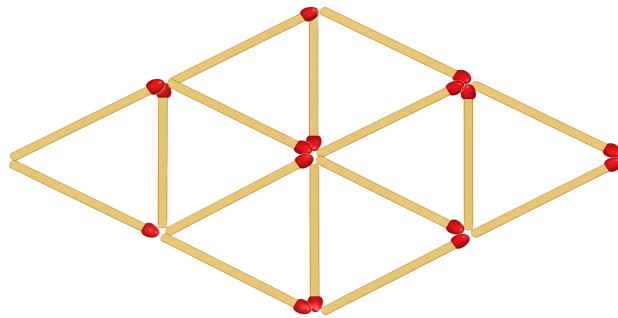
Задача 12. Найдите натуральное число, ближайшее к 18052026, в записи которого все цифры различны.

Задача 13. На одном острове жили Лжец, Правдолюб, Глупец и Хитрец. Лжец всегда лжёт, Правдолюб говорит правду, Глупец повторяет последний услышанный ответ (а если его спросить первым, отвечает как попало), а Хитрец даёт честный ответ, но на предыдущий заданный ему вопрос (на первый же вопрос отвечает как попало). Мудрый Ёжик в тумане

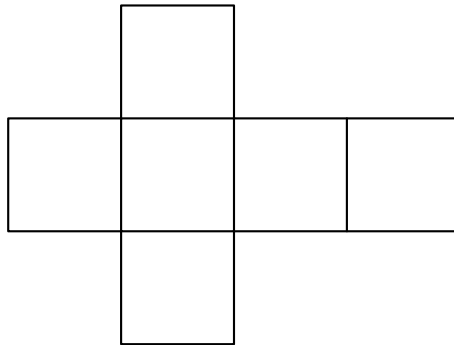
наткнулся на них и решил выяснить, в каком порядке они стоят. Спросив всех по очереди: «Ты Лжец?», он понял только, где Хитрец. Спросив всех в том же порядке: «Ты Хитрец?», он смог дополнительно определить, где Лжец, но полной ясности всё ещё не было. И лишь после того как на вопрос «Ты Глупец?» первый ответил «Да», Ёжику наконец стало ясно, в каком порядке стоят жители. Так в каком же порядке они стоят? («Как попало» означает, что ответ «Да» или «Нет» выбирается произвольно.)

Задача 14. К некоторому натуральному числу прибавили сумму его цифр и получили 2026. Приведите пример такого числа.

Задача 15. Из 16 спичек сложен ромб со стороной в две спички, разбитый на треугольники со стороной в одну спичку (см. рисунок). Сколько спичек потребуется, чтобы сложить ромб со стороной в 10 спичек, разбитый на такие же треугольники?



Задача 16. На рисунке изображена развёртка куба, состоящая из шести квадратов. Расставьте в этих квадратах числа 4, 8, 12, 16, 20, 24 так, чтобы после складывания куба сумма чисел на противоположных гранях была одинаковой.



§2.2 5 класс

§2.2.1 Домино

Задача 0-0. В данном равенстве переложите одну спичку так, чтобы выражение осталось верным.

$$6 + 2 - 4 = 4$$

Образец цифр: | 2 3 4 5 6 7 8 9 0

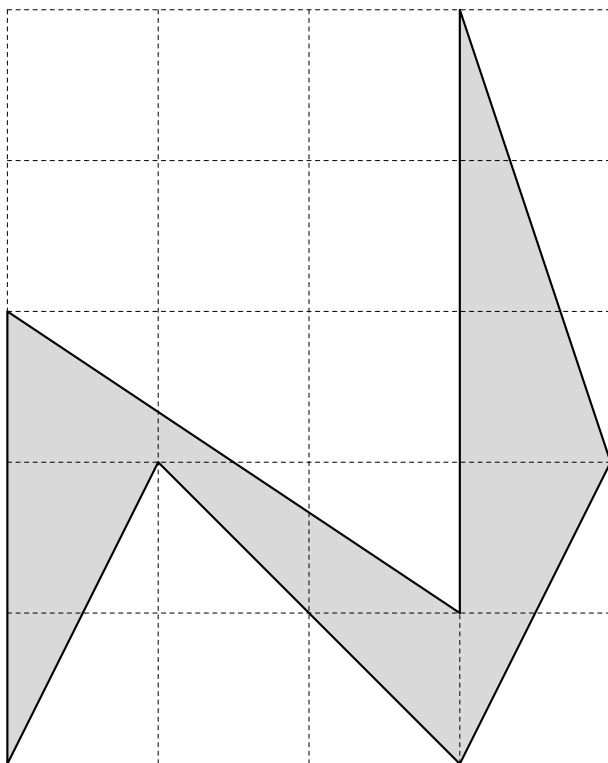
Задача 0-1. Табло электронных часов показывает 17:15. Какое время будут показывать электронные часы в следующий раз, когда сумма часов и минут будет такой же?

Задача 0-2. Петя загадал число, умножил его на 3, вычел 2, разделил на 5 и прибавил 4. Получилось то же самое число. Какое число загадал Петя?

Задача 0-3. Саша задумал двузначное число, записал его на листок, но потом листок потерял. Он лишь вспомнил, что если к этому числу прибавить сумму его цифр, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Какое число задумал Саша?

Задача 0-4. Запишите 6 подряд идущих чётных чисел так, чтобы наименьшее из них было в 2 раза меньше наибольшего.

Задача 0-5. Найдите площадь фигуры, изображённой на рисунке. Длина стороны клетки — 10 см.



Задача 0-6. Периметр прямоугольного листа бумаги равен 100 см. Его разрезали на 4 прямоугольника. Сумма периметров всех частей в 2 раза больше периметра листа. Чему равна длина разрезов?

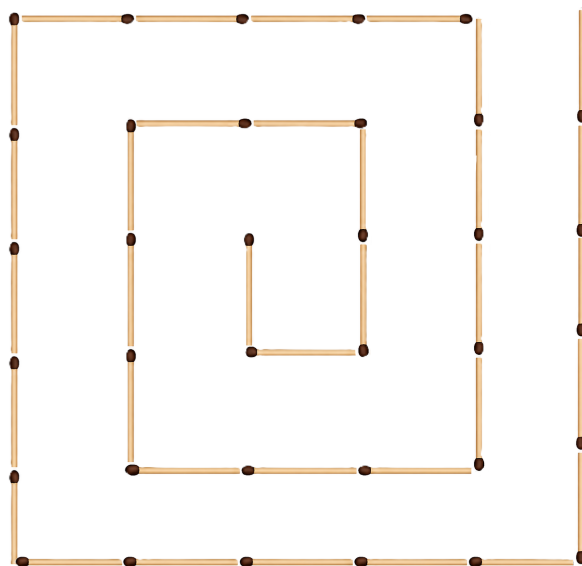
Задача 1-1. Варя вышла из школы на 10 минут позже Вики, но шла в 2 раза быстрее. Через какое время она догонит Вику?

Задача 1-2. Два рыбака ели четырёх карасей 5 дней. Сколько карасей нужно, чтобы прокормить 4 таких рыбаков в течение месяца (30 дней)?

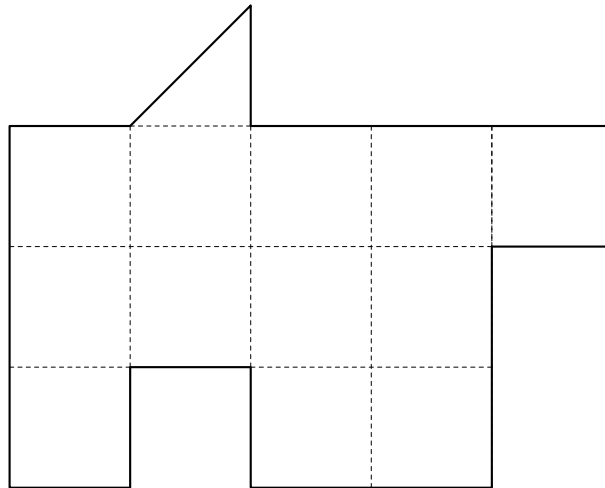
Задача 1-3. Ленивец Ленни сделал «ленивые» электронные часы: в них одна минута длится один год. 1 января 2026 года он выставил на них время 20 : 26, завёл будильник на 22 : 00 и заснул. В каком году будильник зазвонит?

Задача 1-4. Мартышка, Осёл и Козёл затеяли сыграть трио. Уселись чинно в ряд, Мартышка справа. Ударили в смычки, дерут, а толку нет. Поменялись местами, при этом Осёл оказался в центре. А трио всё нейдёт на лад. Пересели ещё раз. При этом оказалось, что каждый из трёх «музыкантов» успел посидеть и слева, и справа, и в центре. Кто где сидел на третий раз?

Задача 1-5. Из 35 спичек выложена фигура, напоминающая «спираль». Переложите 4 спички так, чтобы получились 3 квадрата.



Задача 1-6. Разрежьте, пожалуйста, фигуру на 5 равных частей (фигуры называются равными, если они совмещаются при наложении, фигуры можно переворачивать).



Задача 2-2. Найдите наименьшее натуральное число N , которое при умножении на 19 даёт число с суммой цифр N ?

Задача 2-3. На репетиции спектакля 24 человека стояли на сцене. У некоторых из них на лицах были маски. Каждую минуту эти люди снимали маски и отдавали их кому-то (в любой момент времени у одного человека не могло быть больше 1 маски, передавать маску человеку, у которого была маска в прошлую минуту, нельзя). После репетиции ровно 12 человек отметили, что каждый из них отдавал маску большее количество раз, чем получал. Сколько всего было масок?

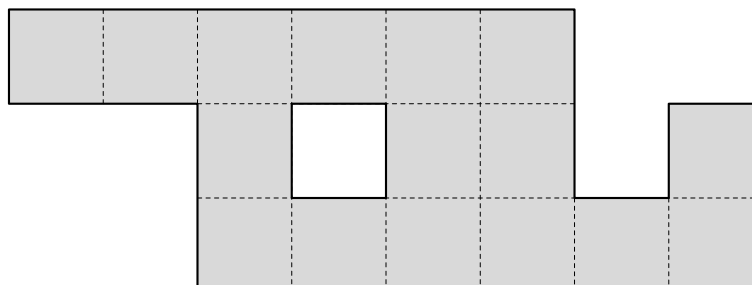
Задача 2-4. На глобусе проведены 17 параллелей и 24 меридиана. На сколько частей разделена поверхность глобуса?

Задача 2-5. Сёстры Вика и Варя очень любят конфеты, но, как нам всем известно, кушать много сладкого вредно для зубов. Поэтому их мама дала девочкам x конфет и попросила распределить их на y дней. Вика попробовала на каждый день выделять по одной конфете, но тогда одна конфета осталась бы лишней. Варя попробовала на каждый день выделять по 2 конфеты, но тогда в какой-то день ей пришлось бы остаться без сладкого. Как вы думаете, какие значения могли принимать x и y ?

Задача 2-6. Представьте число 33 как сумму 12 слагаемых с одинаковыми суммами цифр.

Задача 3-3. В городе Рубиновом 15 школ. Можно ли их соединить дорогами так, чтобы каждая школа была соединена ровно с пятью другими?

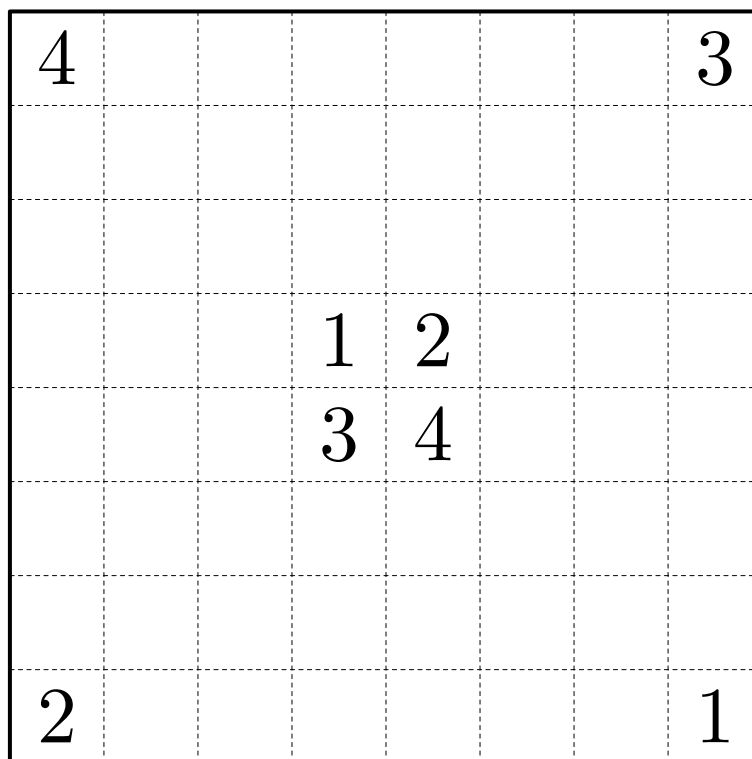
Задача 3-4. Разрежьте фигуру на две одинаковые части двумя различными способами.



Задача 3-5. Сколько нужно сделать прямолинейных разломов, чтобы разделить шоколадку размером 5×7 на 35 долек по линиям между дольками? За один раз можно ломать только один кусок по прямой линии, параллельной стороне шоколадки.

Задача 3-6. Натуральное число называется палиндромом, если оно не изменяется при выписывании его цифр в обратном порядке (например, числа 22, 404, 7887 — палиндромы, а 245, 670, 2025 — нет). Представьте число 2026 в виде суммы 3 палиндромов.

Задача 4-4. Разрежьте квадрат 8×8 на 4 равные фигуры так, чтобы в каждой было 2 одинаковые цифры.



Задача 4-5. Однажды Ваня и Толя зашли в кабинет и увидели на доске 4 ненулевые цифры. Ваня составил из них минимальное возможное четырёхзначное число, а Толя — максимальное возможное четырёхзначное. Сумма их чисел оказалась равна 11990. Какие числа могли быть составлены?

Задача 4-6. Сколькими способами можно переставить числа от 1 до 100 так, чтобы соседние числа отличались не более, чем на 1?

Задача 5-5. Можно ли испечь пирог, который одним прямолинейным разрезом делился бы на 8 частей? Если да, приведите пример.

Задача 5-6. Отметьте на доске 8×8 несколько клеток так, чтобы любая (в том числе и любая отмеченная) клетка граничила по стороне ровно с одной отмеченной клеткой.

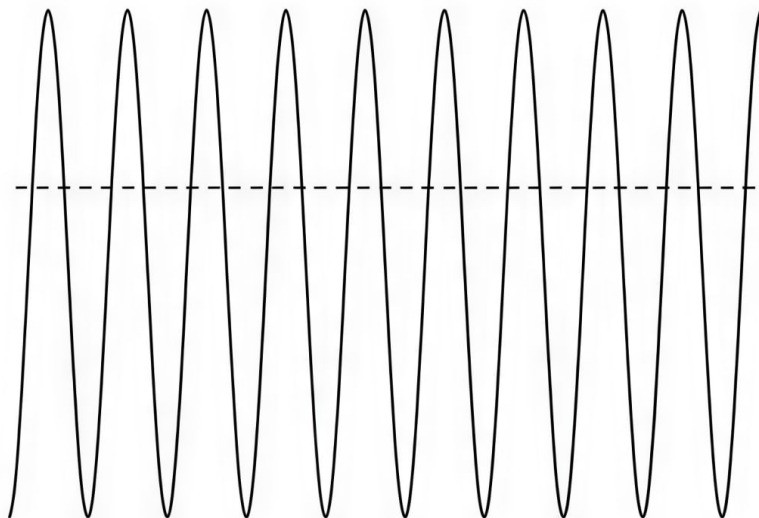
Задача 6-6. На сколько равных восьмиугольников можно разрезать квадрат размером 8×8 ? Укажите все возможные варианты и приведите к каждому пример (все разрезы должны проходить по линиям сетки).

§2.2.2 Пенальти

Задача 1. Сколько существует трёхзначных чисел, состоящих только из 0 и 1?

Задача 2. Шнур разделили на 19 равных частей и сложили змейкой. После этого сделали разрез по пунктирной линии. Шнур распался на 20 кусков: самый длинный из них —

12 метров, самый короткий — 4 метра. Чему была равна длина шнура до того, как его разрезали? Ответ выразите в метрах.



Задача 3. На листе в клетку нарисован прямоугольник 6×13 . Можно ли разрезать его по линиям сетки ровно на 6 квадратов? Если да, то приведите пример.

Задача 4. В сказочном лесу живут единороги и драконы. У каждого единорога 1 рог и 1 голова, а у каждого дракона — 3 рога и тоже 1 голова. Однажды лесник насчитал в лесу 40 голов и 84 рога. Сколько единорогов и сколько драконов живут в этом лесу?

Задача 5. Мария покупает 16 веточек цветов к 8 марта. В магазине есть цветы трёх видов: розы, тюльпаны и пионы. Сколько существует вариантов различных покупок 16 веточек, если Мария хочет, чтобы цветочки каждого вида составляли не менее четверти от всего букета?

Задача 6. Одним пакетиком чая можно заварить два или три стакана чая. Мила и Таня разделили коробку чайных пакетиков поровну. Мила заварила 57 стаканов чая, а Таня — 83 стакана. Сколько пакетиков могло быть в коробке?

Задача 7. Лотерейный билет будем считать счастливым, если между его цифрами можно в некоторых местах расставить знаки четырёх арифметических действий и скобки так, чтобы значение полученного выражения равнялось 100. Является ли счастливым билет №123456? Если да, то приведите пример такого выражения.

Задача 8. Артемий выписал в тетрадь все четырёхзначные числа, произведение цифр которых равняется 3. Какова сумма чисел, выписанных Артемием?

Задача 9. Про далёкий город N , где могут жить только люди с именами Иван, Роман или Макар, известно, что все Ивановы врут Романам, все Романовы — Макарам, все Макаровы — Иванам, а во всех остальных случаях жители города N говорят правду. Однажды, на день рождения мэра этого города, несколько горожан водили хоровод. Каждый сказал своему правому соседу: "Я — Иван". Сколько в этом хороводе могло быть Романов?

Задача 10. В течение года цены на розы два раза поднимали на 50%, а после 8 марта их стали продавать за полцены. Сколько стоит сейчас одна роза, если в начале года она стоила 80 рублей?

Задача 11. Виталий совсем не знает математику, даже плохо разбирается в знаках арифметических действий — умножение путает с делением, а сложение — с вычитанием. В некотором примере ему надо было из первого числа вычесть второе и домножить результат на третье число. Он вместо этого к первому числу прибавил второе и результат поделил на третье. Тем не менее ему повезло — результат оказался верным. Придумайте такой пример.

Задача 12. Каждый день из леса выходят парами ежи и ежихи (в любой паре 1 ёж и 1 ежиха). Известно, что у каждого ежа на иголках либо вдвое больше, либо вдвое меньше яблок, чем на иголках у его ежихи. К тому же лесник недавно заметил, что суммарное количество яблок у ежей и ежих всегда больше 2026. Какое наименьшее значение оно может принимать?

Задача 13. Площадь пересечения прямоугольника и круга составляет 36% площади их объединения, при этом площадь круга вне прямоугольника составляет 20% площади их объединения. Сколько процентов площади прямоугольника находится вне круга?

Задача 14. На фестивале Мише и Роме предложили поучаствовать в конкурсе за сладкую вату. Для того чтобы победить, им нужно проплыть на лодке от пристани до буйка, расположенного относительно пристани вниз по течению реки, и обратно. Расстояние от пристани до буйка — 225 метров, скорость лодки — 15 метров в секунду, а скорость реки — 10 метров в секунду. Через сколько секунд после начала они приплывут к финишу?

Задача 15. Эксперт представляет судье 9 одинаковых по внешнему виду монет. Судья знает, что среди представленных монет есть по три монеты весом 1, 2 и 3 грамма. Эксперт сообщил судье, какая монета сколько весит, а также он принёс с собой прибор, который за одну операцию с двумя группами монет сообщает, весят ли эти группы одинаково или нет. За какое наименьшее число операций эксперт сможет доказать судье, что каждая монета действительно весит столько, сколько он сказал?

Задача 16. Даны два квадрата: 6×6 и 8×8 . Как разрезать (по линиям сетки) каждый из них на две части так, чтобы из получившихся четырёх частей можно было сложить квадрат?

§2.3 6 класс

§2.3.1 Домино

Задача 0-0. В равенстве

$$101 - 102 = 1$$

передвиньте одну цифру так, чтобы оно стало верным.

Задача 0-1. В сказочном лесу живут единороги и драконы. У каждого единорога 1 рог, а у каждого дракона — 3 рога. Однажды лесник насчитал в лесу 40 голов и 84 рога. Сколько единорогов и сколько драконов живут в этом лесу?

Задача 0-2. Сколько решений у ребуса

$$T \cdot Y \cdot M = 72,$$

где различные буквы обозначают разные цифры?

Задача 0-3. Два рыбака делили свой улов. Сначала первый отдал второму половину своих рыб, потом второй отдал первому половину своих. После этого у первого оказалось 15 рыб, а у второго — 9. Сколько рыб было у каждого рыбака до обмена?

Задача 0-4. На празднике было 24 школьника: мальчики и девочки. Оказалось, что каждый мальчик знает ровно 5 девочек, а каждая девочка — 7 мальчиков. Сколько мальчиков и девочек пришло на праздник?

Задача 0-5. Представьте число 29 как сумму 10 натуральных слагаемых с одинаковыми суммами цифр.

Задача 0-6. На доске написали два числа — первое и второе. К первому прибавили второе и получили третье. Ко второму прибавили третье и получили четвертое и так далее. Чему равна сумма шести выписанных чисел, если пятое число равно 6?

Задача 1-1. Назовём натуральное число «замечательным», если оно состоит только из чётных цифр. Сколько существует трёхзначных «замечательных» чисел, все цифры которых различны?

Задача 1-2. Яся, Гриша и Яша идут вместе на занятия. Пока Яся делает 2 шага, Гриша делает 4 шага. Пока Гриша делает 3 шага, Яша делает 5 шагов. Гриша и Яша посчитали, что вместе они сделали 640 шагов. Сколько шагов сделала Яся?

Задача 1-3. По кругу расставлены цифры 1, 2, 3, ..., 9 в произвольном порядке. Каждые две цифры, стоящие подряд по часовой стрелке, образуют двузначное число. Найдите все возможные суммы всех девяти таких чисел.

Задача 1-4. Какой цифрой оканчивается число

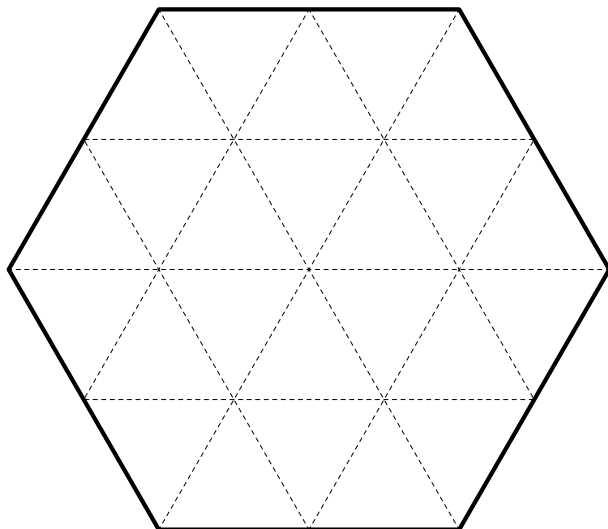
$$1! + 2! + 3! + \dots + 2026!,$$

где $n!$ — произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно?

Задача 1-5. Расстояние от пункта A до пункта B равно 42 км. Из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу выехали 2 велосипедиста. Известно, что они встретились через 1,5 часа. После встречи велосипедист, выехавший из A , приехал в B спустя 2 часа с момента встречи. Найдите скорости велосипедистов.

Задача 1-6. На доске были написаны 10 последовательных натуральных чисел. Когда стёрли одно из них, то сумма девяти оставшихся оказалась равна 2614. Какие числа остались на доске?

Задача 2-2. Разрежьте нарисованный многоугольник на четыре одинаковые фигуры. Резать можно только по линиям сетки.



Задача 2-3. Решите уравнение

$$\overline{AAB} + \overline{ABA} + \overline{BAA} = 2775,$$

если одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, а разным — разные.

Задача 2-4. Вася сказал Маше: «Сейчас мне вдвое больше лет, чем было тебе тогда, когда мне было столько лет, сколько тебе теперь. А когда тебе будет столько лет, сколько мне теперь, нам вместе будет 54 года». Сколько лет каждому из них?

Задача 2-5. Миша любит загадывать желание, смотря на время. Если время полностью симметрично (часы равны минутам, например 23 : 23), он загадывает 1 желание. Если время частично симметрично (часы равны перевёрнутым минутам, например 23 : 32), он загадывает 3 желания. Сколько желаний максимум он может загадать за сутки?

Задача 2-6. На доске выписано 2026-значное число. Каждое двузначное число, образованное соседними цифрами, делится на 17 или на 23. Последняя цифра числа 1. Какова первая?

Задача 3-3. В лесу 110 кормушек. В каждой из них лежит ненулевое число зёрен, все зёрна целые. Известно, что есть кормушки, в которых лежит по 1, 3, 5, ..., 99 (любое нечётное от 1 до 99) зёрен. Также известно, что для любой кормушки в пару ей найдётся такая, что вместе в них 101 зерно. Сколько максимально зёрен суммарно лежит во всех кормушках?

Задача 3-4. В шеренге стоят 2026 человек, и одного из них зовут Артур. Каждый из стоящих в шеренге либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый, кроме Артура, сказал: «Между мной и Артуром стоят ровно два лжеца». Сколько лжецов может быть в этой шеренге, если известно, что Артур — рыцарь?

Задача 3-5. Вася поставил в ряд 6 гирек, при этом массы любых двух соседних гирек различаются на 1г. Известно, что среди них есть гирька массой 1г. Вася посчитал суммарную массу всего набора гирек. Какое число у него может получиться? (Укажите все варианты.)

Задача 3-6. Можно ли расставить по кругу шесть различных чисел так, чтобы каждое из них равнялось произведению двух соседних? Если да, то приведите пример.

Задача 4-4. Сокомандники делят упаковку пончиков. Среди них нет жадных детей, поэтому они делят их поровну, но в таком случае остаётся один лишний пончик. А если ребята разделят поровну три такие же пачки, останется 13 лишних пончиков. Сколько детей может быть в одной команде?

Задача 4-5. Шестиклассники становятся счастливыми, когда за день успевают поиграть в три разных игры. Какое наибольшее количество ребят можно осчастливить, имея доступ к 20 компьютерам с CS2, 30 с PUBG, 40 с FORTNITE и 50 с ROBLOX?

Задача 4-6. В однокруговом волейбольном турнире приняли участие 7 команд. За каждый выигрыш команда получает 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. По итогам турнира команды «ТЮМ» и «ПОБЕДА», занявшие первые два места, набрали по n очков. Причём оказалось, что нет такой команды, которая бы проиграла и «ТЮМ», и «ПОБЕДА». Какое наибольшее значение может принимать n ?

Задача 5-5. У Максима есть конструктор: 9 квадратов и 19 треугольников. Все стороны каждой фигуры равны 5 см. Можно ли сложить из всех этих 28 фигур плоский многоугольник, периметр которого равен 75 см? Если да, то приведите пример.

Задача 5-6. Число $\frac{444!}{10^{222}}$ представили в виде несократимой дроби. Чему равен её знаменатель?

Задача 6-6. Найдите все натуральные числа $n > 2$, для которых существует n -угольник, такой что через него можно провести прямую, пересекающую все его стороны в точках, не являющихся вершинами.

§2.3.2 Пенальти

Задача 1. В саду 150 сорняков. Каждый день бабушка убирает 15 сорняков. Если в саду остаётся хотя бы один сорняк, то ночью вырастает ещё 10. Сколько дней потребуется бабушке, чтобы убрать все сорняки в саду?

Задача 2. Школьник делает своё домашнее задание. Выполнив половину заданий, он делает 15-минутный перерыв. После перерыва ученик решает на 75% медленнее, чем до перерыва. Оказалось, что время от начала работы до окончания перерыва равно времени, которое он потратил на решение после перерыва. Сколько времени школьник потратил в общей сложности, включая перерыв?

Задача 3. На доске написаны две различные ненулевые цифры. Таня просуммировала всевозможные трёхзначные числа, используя только эти две цифры, и получила 1776. Найдите две цифры, которые были написаны на доске.

Задача 4. Известно, что 1-е января 2026 года — четверг. Каким днём недели было 29 мая 2003 года?

Задача 5. После утренней пробежки Карлсон худеет на 1 килограмм, а к вечеру (после поедания плюшек) его вес увеличивается на треть. К вечеру третьего дня Карлсон обнаружил, что поправился вдвое. Сколько он весил до того, как начал заниматься спортом?

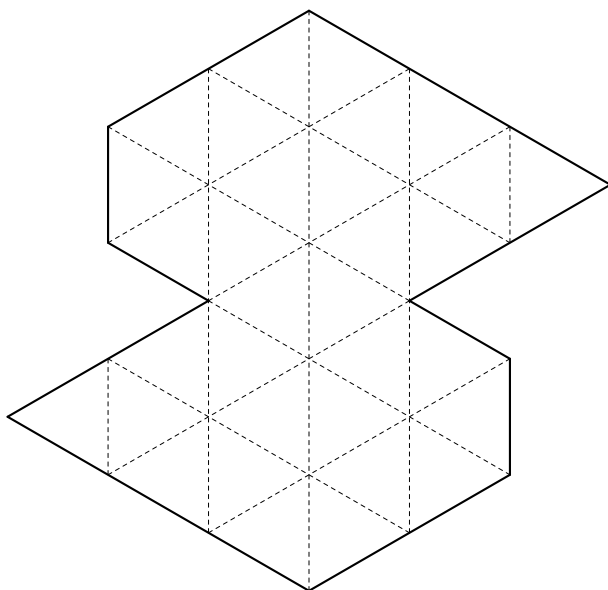
Задача 6. Отметьте, пожалуйста, на плоскости 6 точек так, чтобы от каждой из них на расстоянии 1 находилось ровно три точки.

Задача 7. На острове есть 2 типа жителей: рыцари, которые говорят правду, и лжецы, которые всегда врут. Как-то раз 12 жителей острова встали в ряд. Шестеро из них сказали: «Справа от меня в ряду есть рыцарь», а шестеро других: «Слева от меня в ряду есть лжец». Какое наибольшее количество лжецов может быть среди них? Вместе с ответом приведите пример расстановки рыцарей и лжецов.

Задача 8. Каждая клетка доски 8×8 окрашена в один из трёх цветов: красный, синий или зелёный. В каждой строке не больше 3 красных клеток. В каждом столбце не больше 3 синих клеток. Найдите наименьшее возможное количество зелёных клеток и приведите пример раскраски.

Задача 9. В СПБ-Тауэр расположены 20 высоток. Лёша и Миша (два брата) хотят купить по квартире в СПБ-Тауэр. Миша хочет, чтобы этаж, на котором будет располагаться его квартира, равнялся номеру квартиры его брата. А Лёша желает, чтобы сумма номеров квартир равнялась 1239. Известно, что на каждом этаже по 10 квартир. Помогите им определить номера квартир и этажей, чтобы удовлетворить их предпочтения.

Задача 10. Разрежьте данную фигуру на 4 равные части.



Задача 11. На клетчатой бумаге нарисован квадрат со стороной 5 клеток. Разрежьте его по линиям сетки на 5 частей одинаковой площади так, чтобы суммарная длина проведённых разрезов не превосходила 16 клеток.

Задача 12. Полтора землекопа выкопали полторы ямы за полтора часа. Сколько ям выкопают два землекопа за два часа?

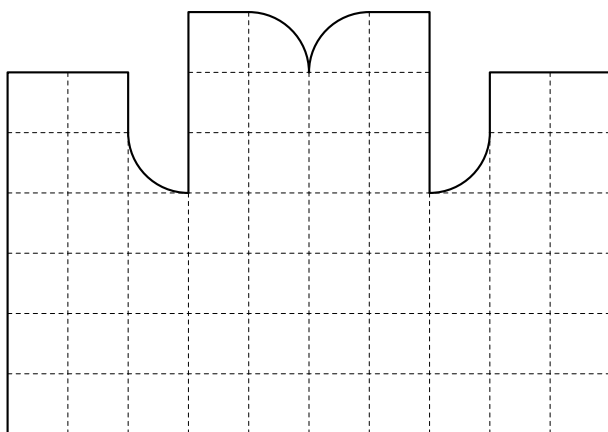
Задача 13. Чтобы спасти принцессу, рыцарь должен успеть добраться до замка за 2 часа. Сначала он скакал 20 километров на коне со скоростью 24 км/ч, потом плыл 3 километра

по озеру со скоростью 4 км/ч, потом бежал 6 километров. С какой наименьшей скоростью рыцарь должен был бежать, чтобы успеть спасти принцессу?

Задача 14. Шнур длиной 3 м состоит из нескольких зелёных и нескольких красных участков. Зелёный участок горит со скоростью 3 см/сек, а красный — со скоростью 2 см/сек. Когда шнур подожгли одновременно с двух концов, он сгорел за 59 секунд. Какова суммарная длина красных участков шнура?

Задача 15. Даны две параллельные прямые. На первой прямой находится 6 точек, на второй 5 точек. Найдите количество треугольников, вершины которых располагаются в этих точках (прямые называются параллельными, если они не пересекаются).

Задача 16. Разрежьте данную фигуру на две части и сложите из них прямоугольник (можно резать не только по линиям сетки).



§2.4 7 класс

§2.4.1 Домино

Задача 0-0. В квадрате 45×45 в чёрный цвет закрашены 2022 клетки. Каково наибольшее n , при котором в любой такой раскраске найдётся целый чёрный квадрат $n \times n$?

Задача 0-1. Какой цифрой заканчивается число $1! + 2! + 3! + \dots + 2026!$ (где $n!$ — произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно)?

Задача 0-2. В треугольнике ABC выполнено условие $AB = 2BC$. Из точки B треугольника ABC провели высоту BH , а после удвоили и получили точку D . Найдите длину отрезка AB , если периметр четырёхугольника $ABCD$ равен 24.

Задача 0-3. У русского фермера есть 5 медведей, 4 волка и 7 зайцев. Сколькими способами он может разбить их на пары так, чтобы в каждой паре были животные разных видов? (Все звери считаются различными.)

Задача 0-4. Дан треугольник ABC , в котором $AB = 18$, $AC = 20$, $BC = 24$ и точка D на стороне BC . Точки B и C отражаются относительно прямой AD в точки B' и C' соответственно. Известно, что прямые BC' и $B'C$ не пересекаются. Найдите BD .

Задача 0-5. Найдите наименьшее нечётное число $n > 9$ такое, что разность между произведением его цифр и суммой его цифр является составным числом (то есть имеет более двух различных натуральных делителей).

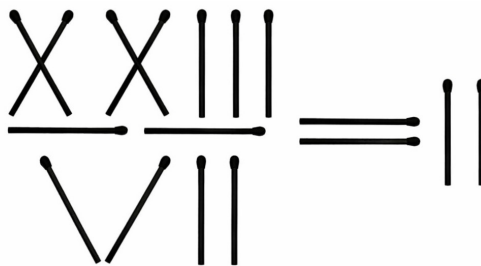
Задача 0-6. Пусть a и b — рациональные числа, которые в несократимом виде имеют знаменатели 60 и 70 соответственно. Чему равен наименьший возможный знаменатель суммы $a + b$?

Задача 1-1. В школе проводят турнир по настольному теннису. В финал вышли 8 игроков. Каждый участник должен сыграть с каждым из остальных ровно один раз. Партия длится 15 минут, и в школе есть только два стола. Какое наименьшее количество часов потребуется для проведения всех партий финала?

Задача 1-2. Решите в целых числах:

$$2x + 6y = xy - 1.$$

Задача 1-3. Переложите одну спичку так, чтобы правая и левая части равенства отличались меньше, чем на 0,1.



Задача 1-4. Какая последняя цифра у числа $20262027^{20262027}$?

Задача 1-5. Найдите сумму цифр числа $\underbrace{999 \dots 99}_\text{2026}^3$.

Задача 1-6. В выражение

$$\frac{2^{\square} + 2^{\square} + 2^{\square}}{2^{\square} + 2^{\square} + 2^{\square}}$$

в каждое поле $\square$ нужно вписать одно из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 (все числа различные). Среди всех возможных значений данной дроби найдите наиболее близкое к 1.

Задача 2-2. Из реки на берег выходят 5 раков. Среди них есть «зачётные» раки (одна клешня большая, другая маленькая), «незачётные» раки (обе клешни маленькие) и один «трофейный» рак — Рачий Царь (обе клешни большие). Они встают в круг и берутся за клешни своих двух соседей. Оказалось, что все «ракопожатия» происходят между большой и маленькой клешней. Сколько существует упорядоченных расстановок раков, которые могут так встать в круг?

Задача 2-3. Найдите сумму обратных величин всех натуральных делителей числа 144.

Задача 2-4. Попарно различные числа a , b , c таковы, что

$$a^3 - 7a = b^3 - 7b = c^3 - 7c.$$

Вычислите значение выражения $a + b + c$.

Задача 2-5. На стороне AB правильного пятиугольника $ABCDE$ во внутреннюю сторону построен квадрат $ABFG$. Найдите угол между прямыми EG и CF .

Задача 2-6. Палиндром — это натуральное число, которое читается одинаково слева направо и справа налево, например, 72327. Каков наименьший пятизначный палиндром, кратный 99?

Задача 3-3. В области 10 городов, и некоторые пары городов соединены дорогами. Всего дорог — 40. Город называется «цитаделью», если он соединён напрямую с каждым другим городом. Каково наибольшее возможное количество «цитаделей»?

Задача 3-4. Представьте число $\left(\frac{17^2 + 19^2}{2}\right)^2$ в виде суммы двух квадратов натуральных чисел.

Задача 3-5. Факториалом натурального числа n называют произведение $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$, полагая $0! = 1$. Сколько натуральных чисел, не превосходящих 448, можно представить как сумму различных факториалов? (Считайте $0!$ и $1!$ различными.)

Задача 3-6. Каждой букве в слове ТЮМЕНЬ взаимно однозначно соответствует значение из набора чисел $\{1, 1, 2, 3, 5, 8\}$. Найдите все решения уравнения

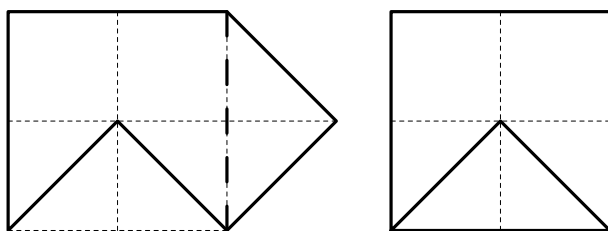
$$\frac{(T + Ю + М + Е + Н + Ъ)^2}{T - Ю + М + Е + Н + Ъ} = T^{ЮМ} E^{НЪ}.$$

Задача 4-4. В квадрате 3×3 расставляют числа $1, 2, \dots, 9$ так, что в каждой строке числа возрастают слева направо, а в левом столбце убывают сверху вниз. Сколько существует таких расстановок?

Задача 4-5. В правильном пятиугольнике $ABCDE$ точки K , L , M — середины отрезков AE , DE , BD соответственно. Найдите угол KML .

Задача 4-6. Влад вырезал из листа бумаги причудливую фигуру и с удивлением обнаружил, что её можно разрезать на две части, из которых затем складывается квадрат (см.

рисунок). Найдите другой способ разрезать эту же фигуру на две части, чтобы из них тоже можно было сложить квадрат.



Задача 5-5. Целые числа a , b , c таковы, что

$$ab + c = 20, \quad bc + a = 26, \quad ca + b = 526.$$

Найдите значение выражения $ab + bc + ca$.

Задача 5-6. Пусть T , $Ю$ и $М$ различные ненулевые числа, такие что

$$T + \frac{1}{Ю} = Ю + \frac{1}{М} = М + \frac{1}{Т}.$$

Найдите значение $|T \cdot Ю \cdot М|$.

Задача 6-6. *Квагга* — это вымершая шахматная фигура, ход которой похож на ход коня, но гораздо длиннее: она может переместиться на 6 клеток в любом направлении (вверх, вниз, влево или вправо), а затем на 5 клеток в перпендикулярном направлении. Найдите количество способов расставить 51 кваггу на шахматной доске 8×8 так, чтобы ни одна квагга не атаквала другую. (Поскольку квагги от природы воинственные создания, считается, что квагга атакует квагг на любых полях, на которые она может переместиться, а также любых других квагг, находящихся на том же поле.)

§2.4.2 Пенальти

Задача 1. В треугольнике ABC провели медиану BM и биссектрису AL так, что ML параллельно AB . Найдите углы треугольника, если $\angle CLM = 50^\circ$.

Задача 2. Известно, что $T + Ю + М + 7 + 2 = 20$ и $T \cdot Ю + Ю \cdot М + М \cdot Т = 10$. Найдите значение выражения $T^2 + Ю^2 + М^2$.

Задача 3. Пусть T , $Ю$, $М$, $Е$, $Н$, $Б$ — различные целые числа от 1 до 9 включительно, удовлетворяющие условию $T \cdot Ю = М \cdot Е = Н + Б$. Найдите возможное значение суммы $T + Ю + М + Е + Н + Б$.

Задача 4. В прямоугольном треугольнике один из углов равен 30° . Найдите отношение большего катета и отрезка перпендикуляра, проведённого к гипотенузе через её середину до пересечения с катетом.

Задача 5. Найдите остаток числа $2^{576} - 1$ при делении на $2^{72} + 1$.

Задача 6. Учитель составляет дробь, используя числа от 1 до 13 включительно. Он записывает некоторые из них в числитель, ставя между ними знак умножения. Затем оставшиеся числа он записывает в знаменатель, также ставя между ними знак умножения. В числителе и знаменателе есть хотя бы по одному числу. Учитель гарантирует, что дробь равна наименьшему её возможному натуральному значению. Чему равно это натуральное число?

Задача 7. На доске написаны три неотрицательных целых числа. На каждом шаге тройка чисел $(T, Ю, М)$ заменяется на $(T + Ю, Ю + М, М + T)$. Найдите наибольшее количество шагов, после которых на доске может появиться число 72.

Задача 8. Четыре жреца кладут по одной руне трёх видов в четыре углубления, образующие квадрат 2×2 . Соседние по стороне углубления не могут хранить одинаковые руны. Сколько существует способов сделать это, если каждый расклад уникален (повороты и отражения считаются разными)?

Задача 9. Приведите пример такой связной фигурки из 10 клеток, что как бы мы ни поставили на клетки этой фигурки двух ферзей, они не побьют все остальные клетки фигурки.

Задача 10. Пусть треугольники ABD , ACE и BCF равносторонние, причём точки D и C лежат по разные стороны от прямой AB , точки A и F — по разные стороны от прямой BC , а точки B и E — по одну сторону от прямой AC . Если $\angle DEF = 170^\circ$, то найдите $\angle ABC$.

Задача 11. Сколькими способами можно расставить несколько знаков «плюс» между цифрами числа 111111111111111 (пятнадцать единиц) так, чтобы полученная сумма делилась на 30?

Задача 12. На улице в ряд стоят 100 домов. Приходит маляр и красит каждый дом в красный цвет. Затем приходит другой маляр и красит каждый третий дом (начиная с дома номер 3) в синий цвет. Затем приходит следующий маляр и красит каждый пятый дом в красный цвет (даже если он уже красный), потом следующий маляр красит каждый седьмой дом в синий цвет, и так далее, чередуя красный и синий, пока не пройдёт 50 маляров. После того как всё закончится, сколько домов будут красными?

Задача 13. Пусть y и x — целые числа, удовлетворяющие неравенствам:

$$3y \geq 2x - 3 \quad \text{и} \quad 4x \geq y + 12.$$

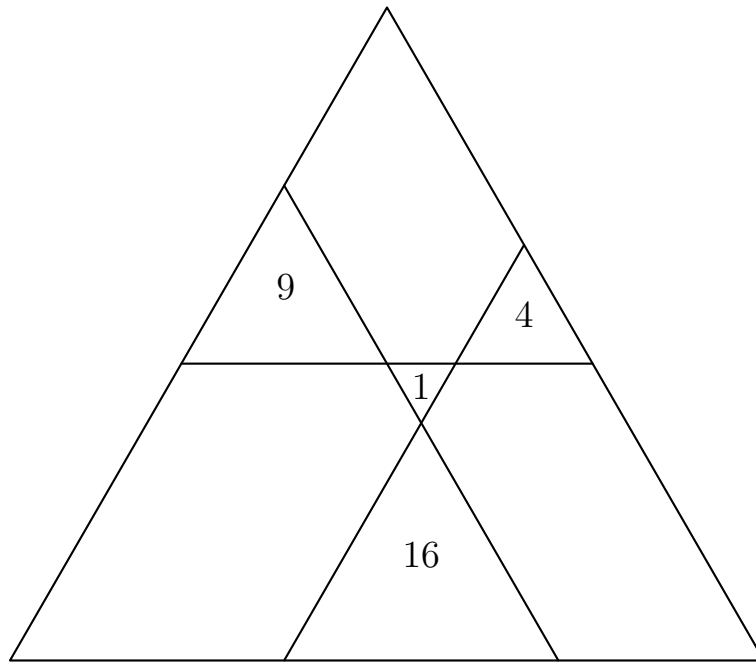
Найдите наименьшее возможное значение $\frac{y}{x}$.

Задача 14. 11 улиточек вместе двигаются с одинаковой скоростью по прямой линии к стене. Когда улитка сталкивается со стеной, она меняет направление движения на противоположное, а когда две улитки сталкиваются друг с другом, они обе меняют направление движения. Найдите, сколько всего столкновений произойдёт до того момента, когда все улитки начнут удаляться от стены.

Задача 15. Решите данное уравнение:

$$x + \frac{x}{1+2} + \frac{x}{1+2+3} + \dots + \frac{x}{1+2+3+\dots+2026} = 2026.$$

Задача 16. Равносторонний треугольник ABC разбит на меньшие равносторонние треугольники отрезками, параллельными сторонам (по одному отрезку на сторону). На рисунке отмечены площади некоторых получившихся маленьких треугольников. Найдите площадь треугольника ABC .



II

Решения

3 IX

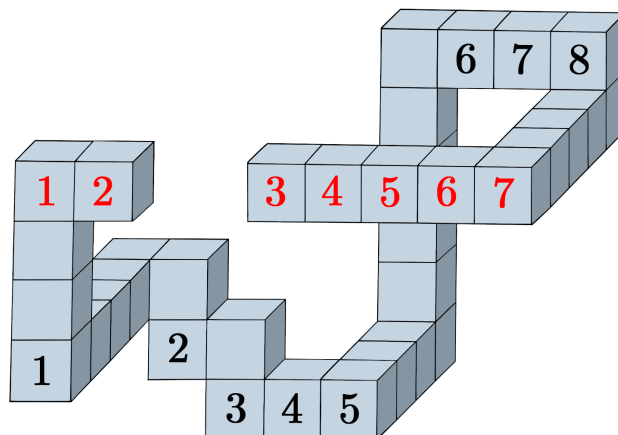
§3.1 4 класс

§3.1.1 Домино

Задача 0-0. Какое минимальное количество кубиков необходимо добавить, чтобы соединить концы фигуры?

Ответ: 1.

Решение. В заднем ряду насчитывается 8 кубиков. В ближайшем к нам ряду их всего 7, значит, не хватает одного.



Задача 0-1. Продолжите последовательность:

7, 12, 17, 9, 14, 19, ...

В ответ запишите три следующих числа последовательности.

Ответ: 11, 16, 21.

Решение. Закономерность: $+5$, $+5$, -8 , затем цикл повторяется. Следовательно, следующие числа: $19 - 8 = 11$, $11 + 5 = 16$, $16 + 5 = 21$.

Задача 0-2. Маша проехала на велосипеде 2 км со скоростью 5 м/с. С какой скоростью проехал эту дистанцию Вася, если стартовав на 75 секунд позже Маши, он финишировал на 75 секунд раньше?

Ответ: 8 м/с.

Решение. 2 км = 2000 м. Маша затратила $2000 : 5 = 400$ секунд. Вася отставал на старте 75 секунд и опередил на финише ещё на 75, значит, его время в пути составило $400 - 150 = 250$ секунд. Тогда скорость Васи: $2000 : 250 = 8$ м/с.

Задача 0-3. Разделите число 240 на две части так, чтобы одна часть составляла треть другой части. В ответ запишите числа в порядке возрастания.

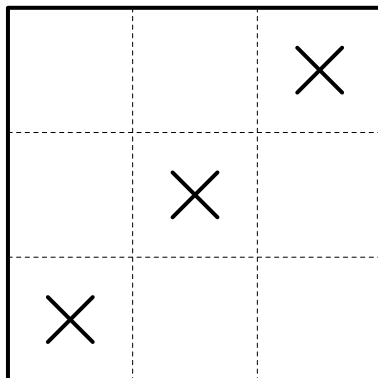
Ответ: 60 и 180.

Решение. Если одна часть втрое меньше другой, то пусть меньшая равна x , тогда большая равна $3x$. Имеем $x + 3x = 240$, откуда $x = 60$, а $3x = 180$.

Задача 0-4. В каждой клетке квадрата 3×3 лежит монета орлом вверх. Какое наименьшее количество монет нужно перевернуть, чтобы в результате не оказалось трёх монет, расположенных в одной вертикали, одной горизонтали или одной диагонали и лежащих одинаково (то есть все три орлом вверх или все три решкой вверх)?

Ответ: 3.

Решение. *Оценка.* В каждой из трёх строк необходимо перевернуть хотя бы одну монету, значит, не менее трёх. *Пример.* Смотрите рисунок.



Задача 0-5. Оля задумала четыре целых числа, а затем нашла все их попарные суммы. Пять из них оказались равны 46, 39, 57, 41 и 59. Чему равна шестая сумма?

Ответ: 52.

Решение. Пусть числа равны a, b, c, d . Тогда известны суммы: $a + b = 46$, $a + c = 39$, $a + d = 57$, $b + c = 41$, $b + d = 59$. Сложив их, получим $3a + 3b + 2c + 2d = 242$. Так как $a + b = 46$, то $3a + 3b = 138$, откуда $2c + 2d = 104$, и $c + d = 52$, что и требовалось.

Задача 0-6. Из 101 далматинца у 29 пятно только на левом ухе, у 17 — только на правом ухе, а у 22 далматинцев нет пятен на ушах. Сколько далматинцев имеют пятно на правом ухе?

Ответ: 50.

Решение. Далматинцев с пятнами на обоих ушах: $101 - 29 - 17 - 22 = 33$. Тогда с пятном на правом ухе: $17 + 33 = 50$.

Задача 1-1. На машине написано: рассчитана на 5 человек, 400 кг. Разбойник Лёня приписал по одной цифре (большей нуля) перед каждым из двух чисел, но в итоге средний вес человека не изменился. Какие цифры он приписал?

Ответ: 5 и 4.

Решение. Пусть Лёня приписал цифры a и b соответственно. Тогда получаем:

$$\frac{1000b + 400}{10a + 5} = \frac{400}{5} \implies 1000b + 400 = 800a + 400 \implies 5b = 4a.$$

Значит, a — ненулевая цифра, делящаяся на 5, то есть $a = 5$, откуда $b = 4$.

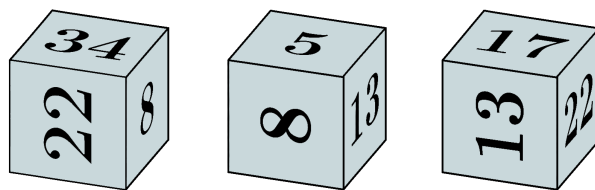
Задача 1-2. На столе лежат три абсолютно одинаковых кубика. Чему равна сумма чисел на гранях, соприкасающихся со столом?

Ответ: 43.

Решение. По рисунку определяем, какие грани лежат внизу: у первого кубика это грань с числом 13, у второго — 22, у третьего — 8. Сумма этих чисел равна $13 + 22 + 8 = 43$.

Задача 1-3. Сколько на шахматной доске имеется всевозможных прямоугольников, состоящих из четырёх клеток?

Ответ: 129.



Решение. Всего существует два типа прямоугольников из четырёх клеток: квадрат 2×2 и прямоугольник 1×4 .

Квадрат 2×2 может поместиться в строке 2×8 7 способами, а таких строк на доске 7, значит, квадратов 2×2 всего $7 \cdot 7 = 49$.

Прямоугольник 1×4 в горизонтальном положении можно разместить 5 способами в строке 1×8 , а таких строк 8, значит, горизонтальных прямоугольников $5 \cdot 8 = 40$. Вертикальных прямоугольников 1×4 ровно столько же, то есть ещё 40. Итого $49 + 40 + 40 = 129$.

Задача 1-4. В школе открылось 4 кружка. На каждый ходило по 40 человек. На все 4 кружка ходили 20 человек, ровно на 3 — 18, ровно на 2 — 10. Сколько человек ходило только на 1 кружок?

Ответ: 6.

Решение. Общее число посещений равно $40 \cdot 4 = 160$. Если вычесть из этой суммы вклад тех, кто ходит на несколько кружков (с учётом кратности), то получим:

$$160 - 4 \cdot 20 - 3 \cdot 18 - 2 \cdot 10 = 160 - 80 - 54 - 20 = 6.$$

Значит, ровно один кружок посещают 6 человек.

Задача 1-5. В особняке у Анель живут кошки: серых и чёрных — 350 штук, белых и чёрных — 457, серых и белых — 203. Сколько котиков каждого цвета у Анель?

Ответ: серых — 48, белых — 155, чёрных — 302.

Решение. Обозначим через С, В, Ч количества серых, белых и чёрных кошек соответственно. Имеем систему:

$$С + Ч = 350, \quad В + Ч = 457, \quad С + В = 203.$$

Сложив все уравнения, получим $2(С + В + Ч) = 1010$, откуда $С + В + Ч = 505$. Тогда $В = 505 - 350 = 155$, $С = 505 - 457 = 48$, $Ч = 505 - 203 = 302$.

Задача 1-6. 4 школьника пожертвовали приюту 231 тысячу рублей. При этом второй пожертвовал вдвое больше первого, третий — втрое больше второго, четвёртый — вчетверо больше третьего. Сколько тысяч пожертвовал четвёртый?

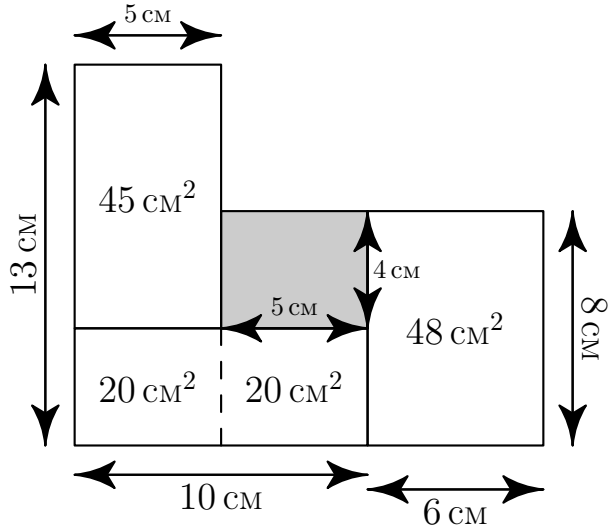
Ответ: 168.

Решение. Пусть первый внёс x тысяч рублей. Тогда второй — $2x$, третий — $6x$, четвёртый — $24x$. Сумма всех взносов: $x + 2x + 6x + 24x = 33x = 231$, откуда $x = 7$. Значит, четвёртый пожертвовал $24 \cdot 7 = 168$ тысяч рублей.

Задача 2-2. На рисунке изображены четыре прямоугольника. Чему равна площадь прямоугольника, обозначенного знаком вопроса?

Ответ: 20 см^2 .

Решение. Рассмотрим прямоугольник со сторонами 5 см и 13 см. Его площадь равна $13 \cdot 5 = 65 \text{ см}^2$. Прямоугольник площадью 40 см^2 разделяется на два прямоугольника площадями $65 - 45 = 20 \text{ см}^2$ и $40 - 20 = 20 \text{ см}^2$. Поскольку высота у них одинаковая, у них одинаковая и ширина: $10 : 2 = 5 \text{ см}$. Высоты же равны $20 : 5 = 4 \text{ см}$. Ширина правого прямоугольника равна $16 - 10 = 6 \text{ см}$. Его площадь 48 см^2 , значит, высота равна $48 : 6 = 8 \text{ см}$. Высота искомого прямоугольника равна $8 - 4 = 4 \text{ см}$. Таким образом, искомый прямоугольник имеет размеры 5 см и 4 см, и его площадь равна $5 \cdot 4 = 20 \text{ см}^2$.



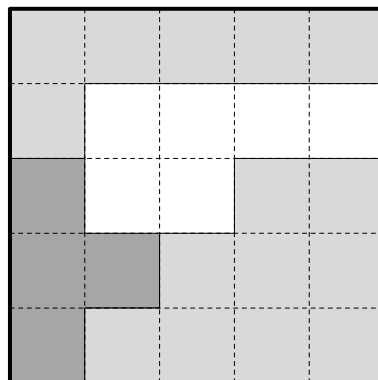
Задача 2-3. На доске написаны числа $1, 2, 3, \dots, 10$. Разрешается стереть любые два числа a и b и вместо них написать число $a + b - 1$. Через сколько ходов закончится этот процесс и какое число в итоге останется на доске?

Ответ: через 9 ходов, останется 46.

Решение. На каждом шаге количество чисел уменьшается на 1, поэтому всего будет $10 - 1 = 9$ ходов. Сумма всех чисел при этом уменьшается на 1 за ход, значит, финальное число равно $1 + 2 + \dots + 10 - 9 = 55 - 9 = 46$.

Задача 2-4. Составьте квадрат, используя ровно четыре из пяти изображённых ниже фигур. Каждую из четырёх выбранных Вами фигур можно использовать только один раз.

Решение. Один из возможных способов:



Задача 2-5. На улицу вышли физики и математики. Каждый из них был либо в сланцах, либо босиком. Физиков было 24, а босых — 16. Обутой математиков оказалось столько же, сколько босых физиков. Сколько всего людей вышло на улицу?

Ответ: 40.

Решение. Пусть x — число босых физиков. Тогда босых математиков $16 - x$, а обутих математиков x . Всего математиков $(16 - x) + x = 16$. Следовательно, общее число людей $24 + 16 = 40$.

Задача 2-6. Маша хочет разрезать палку на 16 равных частей и отмечает на ней, где нужно сделать разрезы. Алина хочет разрезать эту же палку на 20 равных частей и тоже отмечает на ней, где она должна сделать разрезы. Затем Саша разрезает палку во всех местах, которые отметили девочки. Сколько палок получилось у Саши?

Ответ: 32.

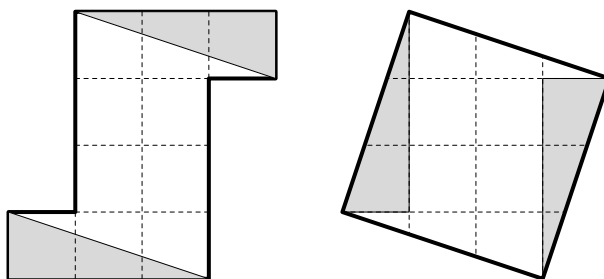
Решение. Маша сделает 15 отметок, Алина — 19. Некоторые отметки совпадают:

$$\frac{4}{16} = \frac{5}{20}, \quad \frac{8}{16} = \frac{10}{20}, \quad \frac{12}{16} = \frac{15}{20}$$

— всего 3 совпадения. Значит, различных мест для разреза $15 + 19 - 3 = 31$, и после разрезания получится $31 + 1 = 32$ куска.

Задача 3-3. Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке, на три части, из которых можно сложить квадрат.

Решение.



Задача 3-4. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды собралась компания из 41 островитянина, среди которых есть хотя бы один рыцарь и хотя бы один лжец. У каждого из них спросили, сколько всего лжецов в этой компании.

- 3 человека сказали: «Трое»
- 7 человек сказали: «Меньше семи»
- 10 человек сказали: «Меньше десяти»
- 21 человек сказал: «Меньше двадцати одного»

Сколько всего лжецов может быть в этой компании? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 20.

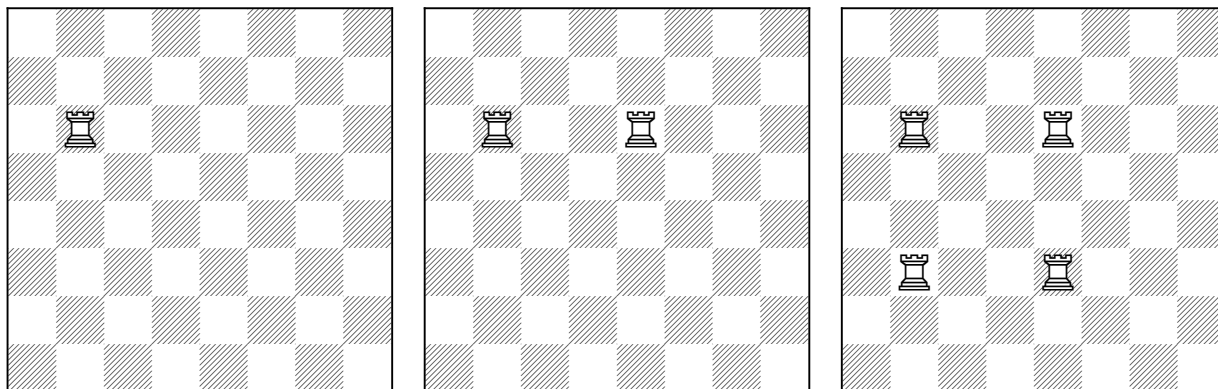
Решение. Пусть L — число лжецов. Если $L < 3$, то те, кто сказал «Трое», лгут, но их трое, а лжецов меньше трёх — противоречие. При $L = 3$ все сказали правду, что невозможно. При $3 < L < 7$ лжецы — это те, кто сказал «Трое», но их 3, а должно быть L — противоречие. Аналогично проверяя остальные интервалы, получаем, что единственное возможное значение $L = 20$.

Проверка: если лжецов 20, то «Трое» сказали рыцари (их 3), «Меньше семи» — 7 рыцарей, «Меньше десяти» — 10 рыцарей, а «Меньше двадцати одного» — 21 лжец (так как $20 < 21$). Все условия выполнены.

Задача 3-5. На шахматной доске стоят ладьи так, что каждая из них бьёт N ладей. При каких N это возможно? (Ладья бьёт в каждом направлении только ближайшую ладью.) Перечислите все варианты.

Ответ: 0, 1, 2.

Решение. *Оценка.* Рассмотрим самую правую верхнюю ладью. Она не может бить никого правее или выше себя, значит, она бьёт не более двух ладей (слева и снизу). Следовательно, $N \leq 2$. *Пример.* Рисунки для $N = 0, 1, 2$ показаны ниже.



Задача 3-6. Брат однажды сказал сестре: "Сейчас мне вдвое больше лет, чем было тебе тогда, когда мне было столько лет, сколько тебе теперь. Когда же тебе будет столько лет, сколько мне теперь, нам вместе будет 63 года." Сколько лет каждому из них сейчас?

Ответ: сестре 21, брату 28.

Решение. Пусть t — разность возрастов брата и сестры. Следовательно, «тогда» возраст сестры был $2t$, возраст брата сейчас $4t$, а возраст сестры сейчас $3t$. Когда сестре станет $4t$, брату будет $5t$, и их сумма $9t = 63$, откуда $t = 7$. Значит, сестре сейчас $3t = 21$, брату $4t = 28$.

Задача 4-4. Натуральные числа записали в виде пирамиды. Если продолжить её, то какое число будет записано прямо под 122?

```

      1
    2  3  4
  5  6  7  8  9
10 11 12 13 14 15 16

```

Ответ: 146.

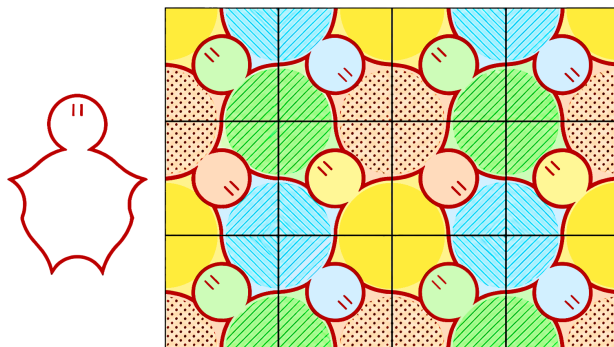
Решение. Обратим внимание, что левое число в каждом ряду имеет вид $n^2 + 1$. Так как $122 = 11^2 + 1$, то оно стоит первым слева в своём ряду. В следующем ряду второе слева число имеет вид $n^2 + 2$. Для $n = 12$ это $144 + 2 = 146$. Значит, под 122 будет стоять 146.

Задача 4-5. Сколько различных трёхзначных чисел, не кратных 5, можно составить из цифр 2, 4, 5, 7, 0? (Цифры в числах могут повторяться.)

Ответ: 60.

Решение. Чтобы число не делилось на 5, последняя цифра не должна быть 0 или 5, то есть может быть только 2, 4, 7 — 3 варианта. Первая цифра не может быть 0 — 4 варианта. Вторая цифра — любая из 5. Итого $4 \cdot 5 \cdot 3 = 60$ чисел.

Задача 4-6. Если из квадратных плиток, которые отличаются только расцветкой, сложить прямоугольник 3×4 , как на рисунке, то целиком в нём поместится 6 черепашек. А сколько черепашек поместится целиком в составленном таким же образом прямоугольнике 40×41 ?



Ответ: 1560.

Решение. Черепашка помещается тогда и только тогда, когда центр её панциря попадает в узел сетки, находящийся на стыке четырёх плиток. В прямоугольнике $m \times n$ таких узлов $(m - 1)(n - 1)$. Для 40×41 получаем $39 \cdot 40 = 1560$.

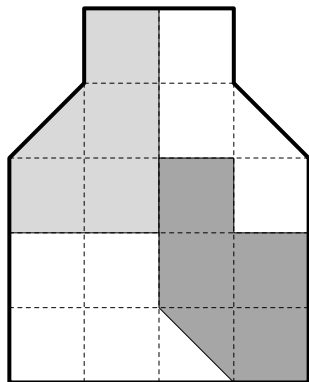
Задача 5-5. Найдите наибольшее натуральное число, в котором все цифры различны, а при сложении всяких двух соседних цифр получается простое число. (Простое число — это натуральное число, которое делится только на единицу и на самого себя.)

Ответ: 9856743021.

Решение. Будем строить число слева направо, каждый раз выбирая наибольшую из ещё не использованных цифр, которая даёт простую сумму с предыдущей. Так получается начало 9856743. Для последних трёх цифр остаются 0, 1, 2. Перебирая все 6 перестановок, находим, что условию удовлетворяет только 021. Искомое число — 9856743021.

Задача 5-6. Разрежьте фигуру ниже на 4 части одинакового периметра так, чтобы любые две части были не равны между собой.

Решение. Один из возможных способов разрезания показан на рисунке:



Задача 6-6. Гриша становится добрым, когда съедает три конфеты разного вида. Какое наибольшее количество дней Гриша может оставаться добрым, если у него есть 15 Твиксов, 45 Кит-катов, 60 Сникерсов и 70 Баунти?

Ответ: 60.

Решение. *Оценка.* Не считая Баунти, у Гриши $15 + 45 + 60 = 120$ конфет. В каждый день он должен съесть хотя бы две из них, поэтому дней не может быть больше $120/2 = 60$.

Пример. 15 раз он ест Твикс, Сникерс, Баунти; 45 раз — Кит-кат, Сникерс, Баунти. Тогда все Твиксы (15), все Кит-каты (45), все Сникерсы ($15 + 45 = 60$) и 60 Баунти использованы.

§3.1.2 Пенальти

Задача 1. Егор разрезал листок на квадрат и прямоугольник: площадь квадрата 8100 мм^2 , периметр прямоугольника 320 мм. Найдите длину и ширину листка, ответ запишите в см.

Ответ: 16 см и 9 см.

Решение. Площадь квадрата $8100 \text{ мм}^2 = 81 \text{ см}^2$, значит, сторона этого квадрата равна 9 см. Периметр прямоугольника $320 \text{ мм} = 32 \text{ см}$. Так как одна его сторона равна 9 см, то вторая сторона равна $(32 - 9 \cdot 2) : 2 = 7 \text{ см}$. Тогда длина исходного листа составляет $9 + 7 = 16 \text{ см}$, а ширина равна 9 см.

Задача 2. Двоечник Денис на доске в строчку писал плюсы и минусы, чередуя их. Расстояние между двумя минусами — 30 мм, расстояние между плюсом и минусом — 15 мм. Сколько сантиметров между первым и последним нарисованным знаком, если известно, что первый написанный знак — это плюс, а всего в строчке было написано 24 минуса и 25 плюсов.

Ответ: 72 см.

Решение. Знаки чередуются, поэтому между любыми двумя соседними знаками расстояние равно 15 мм. Всего выписано $24 + 25 = 49$ знаков, значит, промежутков между первым и последним знаком 48. Тогда общее расстояние равно $48 \cdot 15 = 720 \text{ мм} = 72 \text{ см}$.

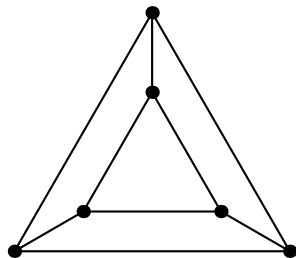
Задача 3. Даша дома в шкатулке хранила поровну серебряных и золотых колец. Волшебник превратил каждое серебряное кольцо в семь серых бабочек, а каждое золотое — в двух жёлтых бабочек. Бабочек оказалось больше 60. Какое наименьшее число серебряных колец могло лежать в шкатулке?

Ответ: 7.

Решение. Каждая пара колец (серебряное и золотое) даёт $2 + 7 = 9$ бабочек. Значит, общее число бабочек должно делиться на 9. Наименьшее число, большее 60 и делящееся на 9, равно 63, что и является ответом.

Задача 4. Нарисуйте 6 точек и соедините их отрезками так, чтобы из каждой точки выходило три отрезка и никакие отрезки не пересекались.

Решение.



Задача 5. Сколько сейчас времени, если до конца суток осталось три пятых того, что уже прошло от начала суток?

Ответ: 15:00.

Решение. Пусть с начала суток прошло x минут, тогда до конца дня осталось $24 \cdot 60 - x$ минут. По условию

$$24 \cdot 60 - x = \frac{3}{5}x \implies \frac{8}{5}x = 24 \cdot 60,$$

откуда прошло $x = 15 \cdot 60$ минут, то есть 15 часов.

Задача 6. Новая шахматная фигура «старый король» бьёт только соседние по горизонтали и вертикали клетки. Какое максимальное количество «старых королей» можно расположить на шахматной доске? Дайте ответ и пример.

Ответ: 32.

Решение. *Оценка.* Разобьём шахматную доску на 32 доминошки (пары соседних клеток). В каждой такой паре нельзя поставить двух королей, так как они будут бить друг друга. Следовательно, всего можно поставить не более 32 королей. *Пример.* Поставим по одному королю на каждую клетку одного цвета (например, на все белые клетки). Так как король бьёт только клетки противоположного цвета, то фигуры на клетках одного цвета не будут бить друг друга. Белых клеток на доске ровно 32, что и требовалось.

Задача 7. У Маши в кошельке 1000 рублей. На рынке 3 картошки и 2 морковки стоят 231 рубль, а 5 картошек и 4 морковки стоят 407 рублей. Сколько овощей купила Маша, если известно, что морковки и картошки она купила поровну, а также потратила максимальное количество денег.

Ответ: 22.

Решение. Удвоим стоимость 3 картошек и 2 морковок: 6 картошек и 4 морковки стоят 462 рубля. Вычитая стоимость 5 картошек и 4 морковок (407 рублей), получаем, что одна картошка стоит 55 рублей. Тогда одна морковка стоит $(407 - 5 \cdot 55) : 4 = 33$ рубля. Так как Маша купила одинаковое количество картошки и морковки, то стоимость набора из одной картошки и одной морковки равна $55 + 33 = 88$ рублей. На 1000 рублей можно купить 11 таких наборов (и останется 32 рубля). Значит, всего куплено $11 \cdot 2 = 22$ овоща.

Задача 8. Сумма 7 последовательных чисел равна 119. Найдите наименьшее из этих чисел.

Ответ: 14.

Решение. Пусть среднее число равно x . Тогда сумма семи последовательных чисел равна $7x$. Значит, $7x = 119$, откуда $x = 17$. Наименьшее число равно $17 - 3 = 14$.

Задача 9. Лиля задумала целое число. Анель умножила его не то на 5, не то на 6. Даша прибавила к результату не то 6, не то 7. Катя отняла от результата не то 7, не то 8. В итоге получилось число 84. Какое число задумала Лиля? Дайте все варианты ответа.

Ответ: 14, 17.

Решение. Рассмотрим возможные значения перед последним действием: $84 + 7 = 91$ или $84 + 8 = 92$. Перед действием Даши могли быть числа: $91 - 6 = 85$, $91 - 7 = 84$, $92 - 6 = 86$, $92 - 7 = 85$. Из чисел 84, 85, 86 на 5 или 6 делятся только 84 (делится на 6) и 85 (делится на 5). Значит, задуманное число могло быть $84 : 6 = 14$ или $85 : 5 = 17$.

Задача 10. Представьте число 2025 как сумму двух палиндромов, каждый из которых больше 10. (Палиндром — это натуральное число, которое одинаково читается справа налево и слева направо. Например, 0, 989, 5115.)

Решение. $2025 = 1551 + 474$.

Задача 11. Паша написал на доске последовательно несколько натуральных чисел, каждое из которых отличается от предыдущего либо в 9 раз, либо на 10. Сумма всех выписанных чисел равна 199. Какое наименьшее количество чисел мог выписать Паша? Приведите ответ и пример.

Ответ: 3.

Решение. *Оценка.* Докажем, что двух чисел недостаточно. Если чисел два, то возможны только четыре случая:

- $x + (x + 10) = 199 \implies 2x = 189$, но слева стоит чётное число, а справа — нечётное, противоречие;
- $x + (x - 10) = 199 \implies 2x = 209$, аналогично противоречие;
- $x + 9x = 199 \implies 10x = 199$, слева число делится на 10, а справа — нет, противоречие;
- $x + \frac{x}{9} = 199 \implies 10x = 1791$, аналогично противоречие.

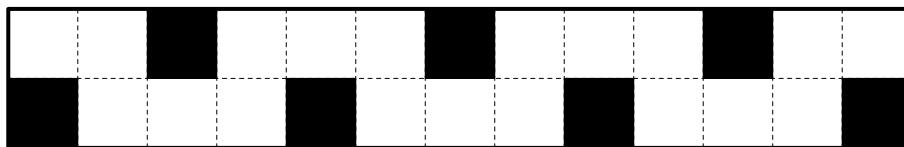
Значит, меньше трёх чисел быть не может. *Пример.*

$$63, 73, 63: \quad 73 = 63 + 10, \quad 63 = 73 - 10, \quad 63 + 73 + 63 = 199.$$

Задача 12. Клетки доски 2×13 покрашены в чёрный и в белый цвета так, что каждая белая клетка граничит по стороне хотя бы с одной чёрной клеткой. Какое наибольшее количество белых клеток может быть на доске? Дайте ответ и пример.

Ответ: 19.

Решение. *Оценка.* Одна чёрная клетка граничит не более с тремя белыми клетками (по стороне). Всего на доске 26 клеток. Чтобы белых клеток было как можно больше, нужно минимизировать число чёрных. Если чёрных 6, то они могут покрыть не более $6 \cdot 3 = 18$ белых, но тогда всего клеток $6 + 18 = 24 < 26$. Значит, чёрных должно быть не менее 7. Тогда белых не более $26 - 7 = 19$. *Пример.*



Задача 13. Отрезок, длина которого 2025 см, разделили на 2 части. Чему равно расстояние между серединами этих частей?

Ответ: 1012,5 см.

Решение. Расстояние между серединами двух частей равно половине длины всего отрезка:

$$2025 : 2 = 1012,5 \text{ см.}$$

Задача 14. Какова первая цифра в наименьшем натуральном числе, сумма цифр которого равна 2024?

Ответ: 8.

Решение. Чтобы число было наименьшим, в нём должно быть как можно больше девяток. Так как $2024 = 9 \cdot 224 + 8$, то наименьшее число начинается с 8, а затем идут 224 девятки.

Задача 15. Каждый день Егор записывает в тетрадь различные числа. В первый день он записал числа 1 и a , во второй — a , b и 3, в третий — 2, 4 и c , в четвёртый — a , b и 4, а в последний — четыре числа a , b , c , e . Известно, что всё, что он написал в первый день, было написано и в четвёртый, а всё, что он написал со второго по четвёртый день (включительно), можно было увидеть в тетради в последний день. Найдите, чему равны числа a , b , c , e .

Ответ: $a = 2$, $b = 1$, $c = 3$, $e = 4$.

Решение. В первый день записаны числа 1 и a , и они оба присутствуют в четвёртом дне (там записаны a , b , 4). Следовательно, среди чисел a , b , 4 должны быть 1 и a , откуда $b = 1$.

Во второй, третий и четвёртый дни записаны только те числа, которые затем появились в пятом дне. Во второй день записаны a , b , 3, значит, 3 — это либо c , либо e . В четвёртый день записаны a , b , 4, значит, 4 — это тоже либо c , либо e . В третий день записаны 2, 4, c . Поскольку 3 и 4 — это в точности c и e (в некотором порядке), число 2 не может быть ни c , ни e , следовательно, $2 = a$. Остаётся определить, чему равны c и e . В третий день записаны 4 и c как различные числа, значит, $c \neq 4$. Поэтому $c = 3$, а $e = 4$.

Задача 16. Из пункта A в пункт B одновременно выезжает грузовик со скоростью 80 км/ч и автомобиль со скоростью 100 км/ч. Через некоторое время вслед за ними выехал мотоцикл со скоростью 200 км/ч, который сначала обогнал грузовик, а через полчаса после этого — автомобиль. Сколько проехал автомобиль до того, как его обогнал мотоцикл?

Ответ: 300 км.

Решение. Пусть t — время от старта грузовика до момента обгона его мотоциклом. Тогда грузовик проехал $80t$ км, а автомобиль — $100t$ км. В момент обгона грузовика расстояние между автомобилем и грузовиком равно $100t - 80t = 20t$ км. Ещё через полчаса автомобиль проедет 50 км, и тогда его догонит мотоцикл. За эти полчаса мотоцикл проехал $200 \cdot 0,5 = 100$ км, что равно $20t + 50$. Отсюда $20t = 50$, $t = 2,5$ ч. Автомобиль к моменту обгона мотоциклом проехал $100 \cdot 2,5 + 50 = 300$ км.

§3.2 5 класс

§3.2.1 Домино

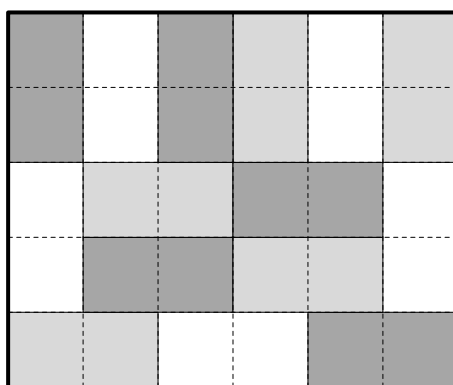
Задача 0-0. У моторной лодки бака хватает на 40 км против течения или на 60 км по течению. На какое максимальное расстояние она может отплыть, чтобы вернуться в изначальное положение?

Ответ: 40 км.

Решение. Лодка может отплыть на 40 км против течения, израсходовав всё топливо. Затем она будет двигаться обратно по течению без затрат топлива (течение само её принесёт). Таким образом, максимальное расстояние от пристани равно 40 км. Больше отплыть нельзя, так как на движение против течения топлива хватает только на 40 км.

Задача 0-1. Разрежьте доску 5×6 на 8 вертикальных и 7 горизонтальных доминошек.

Решение.



Задача 0-2. Решите данный ребус (различные буквы — это различные цифры):

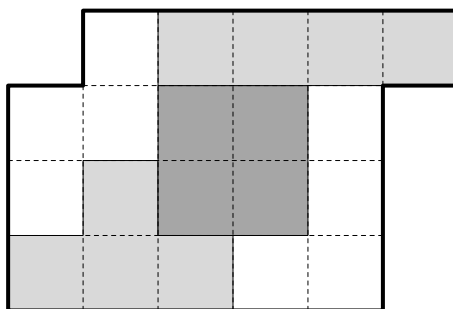
$$\text{ПАС} + \text{УДАР} = \text{ГООООООЛ}.$$

Ответ: решений нет.

Решение. Число ПАС трёхзначное, УДАР — четырёхзначное, значит, их сумма не превосходит $999 + 9999 = 10998$, то есть не более пятизначного числа. А в правой части стоит восьмизначное число. Противоречие. Следовательно, решений нет.

Задача 0-3. Егор разрезал приведённую ниже фигуру по линиям сетки на 5 равных по площади фигур. Оказалось, что среди этих фигур нет равных. Покажите, как это возможно.

Решение.



Задача 0-4. Найдите наименьшее натуральное число с суммой цифр 2025.

Ответ: 99...9 (225 девяток).

Решение. Чтобы число было наименьшим, нужно, чтобы в нём было как можно меньше разрядов, то есть каждая цифра должна быть максимальной, то есть 9. Так как $2025 = 225 \cdot 9$, то наименьшее число состоит из 225 девяток.

Задача 0-5. Сколькими способами можно представить число 50 в виде суммы двух чётных положительных целых чисел? (Представления, различающиеся порядком слагаемых, считать совпадающими.)

Ответ: 12.

Решение. Чётные положительные числа, не превосходящие 50, это 2, 4, ..., 48. Чтобы их сумма была равна 50, нужно выбрать x и $50 - x$ чётными. Так как x может быть любым чётным числом от 2 до 48 (включительно), то всего таких пар 12.

Задача 0-6. Решите данный ребус (различные буквы — это различные цифры):

$$\text{ДУРАК} + \text{УДАР} = \text{ДРАКА}.$$

Ответ: Д = 5, У = 1, Р = 2, А = 8, К = 6.

Решение. Получаем, что слова, данные в ребусе, имеют такую комбинацию чисел: ДУРАК = 51286, УДАР = 1582, ДРАКА = 52868. Проверим: $51286 + 1582 = 52868$.

Задача 1-1. Задумано трёхзначное число, у которого с любым из чисел 564, 234 и 569 совпадает один из разрядов, а два других не совпадают. Какое число задумано?

Ответ: числа вида $\overline{53x}$ или $\overline{26x}$, где x — любая цифра, кроме 4 и 9.

Решение. Пусть задуманное число имеет вид $\overline{abc}$. Заметим, что числа 564 и 569 отличаются только последней цифрой. Чтобы с каждым из них совпадал ровно один разряд, возможны два случая.

Случай 1: совпадает первая цифра $a = 5$. Тогда, чтобы с 564 и 569 не было лишних совпадений, нужно $b \neq 6$, $c \neq 4$ и $c \neq 9$. Теперь рассмотрим число 234. Так как $a = 5 \neq 2$ и $c \neq 4$, единственная возможность для ровно одного совпадения — это $b = 3$. Получаем числа $\overline{53x}$, где $x \notin \{4, 9\}$.

Случай 2: совпадает вторая цифра $b = 6$. Тогда $a \neq 5$, $c \neq 4$, $c \neq 9$. Для числа 234 совпадение по b невозможно ($6 \neq 3$), а по c — запрещено ($c \neq 4$), значит, должно быть $a = 2$. Получаем числа $\overline{26x}$, где $x \notin \{4, 9\}$.

Других случаев быть не может: если не совпадают ни первая, ни вторая цифры с 564 и 569, то пришлось бы совпадать последней одновременно с 4 и 9, что невозможно. Следовательно, искомые числа — в точности $\overline{53x}$ и $\overline{26x}$ при $x \neq 4, 9$.

Задача 1-2. Анатолий выбрал несколько чисел из набора от 1 до 13 и разбил их на 2 группы с равной суммой. Определите наибольшее значение этой суммы.

Ответ: 45.

Решение. *Оценка.* Сумма всех чисел от 1 до 13 равна 91. Так как 91 нечётно, разбить все числа на две группы с равной суммой нельзя. Но можно не использовать одно число. Если выбросить 1, сумма станет 90, и её можно разбить пополам: 45 и 45. *Пример.* В первой группе 2, 3, 4, 5, 6, 12, 13 (сумма 45), во второй — 7, 8, 9, 10, 11 (сумма 45). Значит, максимальная сумма равна 45.

Задача 1-3. Найдите сумму $1^3 + 2^3 + \dots + 9^3$.

Ответ: 2025.

Решение. $1^3 + 2^3 + \dots + 9^3 = (1 + 2 + \dots + 9)^2 = 45^2 = 2025$.

Задача 1-4. Дана доска 5×5 , приведите такой пример пути шахматного коня, при котором он побывает в каждой клетке ровно по 1 разу. Вы можете сами выбрать изначальную позицию коня.

Решение.

23	12	7	2	25
6	17	24	13	8
11	22	1	18	3
16	5	20	9	14
21	10	15	4	19

Задача 1-5. Найдите такое наименьшее натуральное число $n > 10$, что квадрат суммы цифр числа n равняется n .

Ответ: 81.

Решение. Сумма цифр числа n не может быть больше $9k$, где k — число цифр. Для $n > 10$ подходят только квадраты чисел от 4 до 9 (так как $3^2 = 9 < 10$). Проверяем: $4^2 = 16$, сумма цифр 7, $7^2 \neq 16$; $5^2 = 25$, сумма 7; $6^2 = 36$, сумма 9; $7^2 = 49$, сумма 13; $8^2 = 64$, сумма 10; $9^2 = 81$, сумма 9, $9^2 = 81$. Значит, $n = 81$.

Задача 1-6. Возраст Ивана 2025 лет 2025 месяцев 2025 недель 2025 дней 2025 часов. Сколько полных лет Ивану, если считать, что в году ровно 360 дней, в каждом месяце ровно 30 дней, в каждом дне ровно 24 часа?

Ответ: 2238.

Решение. Переведём всё в дни. Часы: $2025 : 24 = 84$ дня (остаток 9 часов). Недели: $2025 \cdot 7 = 14175$ дней. Месяцы: $2025 \cdot 30 = 60750$ дней. Сумма дополнительных дней: $84 + 14175 + 60750 + 2025 = 77034$. Переведём в годы: $77034 : 360 = 213$ лет (остаток 354 дня). Значит, Ивану $2025 + 213 = 2238$ полных лет.

Задача 2-2. Расставьте по кругу числа 14, 27, 36, 57, 178, 467, 590, 2345 так, чтобы любые два соседних числа имели общую цифру.

Решение. $14 \rightarrow 178 \rightarrow 27 \rightarrow 57 \rightarrow 590 \rightarrow 2345 \rightarrow 36 \rightarrow 467 \rightarrow 14$.

Задача 2-3. Про цифры a и b известно, что

$$\frac{a}{b} = b + \frac{a}{10}.$$

Найдите любую подходящую под условие пару a и b .

Ответ: $a = 5$, $b = 2$.

Решение. Преобразуем исходное выражение:

$$\frac{a}{b} = b + \frac{a}{10} \implies 10a = 10b^2 + ab \implies 10(a - b^2) = ab.$$

Так как $ab \geq 0$, то и $a - b^2 \geq 0$, откуда $a \geq b^2$, но такое возможно только если $b \leq 3$, иначе $a \geq b^2 \geq 4^2 = 16 > 9$ (a — цифра). Также $b \neq 0$, ведь иначе при делении на ноль левая часть исходного равенства не будет иметь смысла. Осталось проверить $b = 1, 2, 3$.

Если $b = 1$, то $10(a - 1) = a \implies a = 10/9$ — не цифра. Если $b = 2$, то $10(a - 4) = 2a \implies a = 40/8 = 5$ — подходит. Если $b = 3$, то $10(a - 9) = 3a \implies a = 90/7$ — не цифра.

Задача 2-4. У каждого из тридцати шестиклассников есть одна ручка, один карандаш и одна линейка. После их участия в олимпиаде оказалось, что 26 учеников потеряли ручку, 23 — линейку и 21 — карандаш. Найдите наименьшее возможное количество шестиклассников, потерявших все три предмета.

Ответ: 10.

Решение. *Оценка.* Не потеряли ручку $30 - 26 = 4$ человека, не потеряли линейку $30 - 23 = 7$, не потеряли карандаш $30 - 21 = 9$. Таким образом, обладать хотя бы одним предметом могут не более, чем $4 + 7 + 9 = 20$ человек. Значит, как минимум $30 - 20 = 10$ человек потеряли все три предмета. *Пример.* Пусть 20 человек потеряли ровно по два предмета, а остальные 10 — все три.

Задача 2-5. Покрасьте 33 клетки квадрата 7×7 , соблюдая правило: каждая следующая закрашенная клетка должна соседствовать с предыдущей закрашенной клеткой, но не должна соседствовать ни с одной другой ранее закрашенной клеткой.

Решение.

13	14	15		19	20	21
12		16	17	18		22
11	10				24	23
	9	8		26	25	
1		7		27		33
2		6		28		32
3	4	5		29	30	31

Задача 2-6. Какое наибольшее количество ферзей можно расставить на шахматной доске 8×8 так, чтобы они не били друг друга? В качестве ответа приведите пример расстановки, содержащий наибольшее количество ферзей.

Ответ: 8.

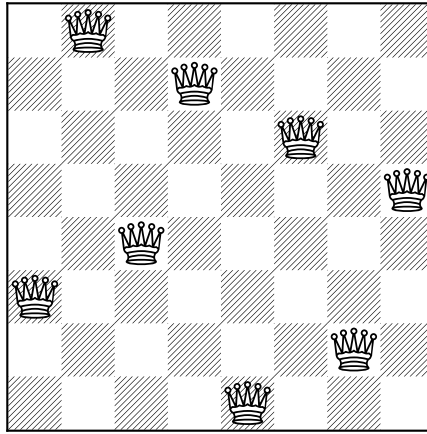
Решение. *Оценка.* Ферзей можно поставить не более восьми, так как каждый ферзь занимает свою горизонталь. *Пример.* Смотрите рисунок.

Задача 3-3.

$$2025 = (20 + 25)^2.$$

Это красивое свойство нынешнего года (в какое прекрасное время мы живём). Квадрат суммы чисел, образованных из первой и второй половин числа (без перестановки цифр), равен исходному числу. Найдите ближайший в будущем год с таким же свойством.

Ответ: 3025.



Решение. Заметим, что числа, обладающие данным свойством, должны быть точными квадратами. Тогда достаточно перебрать квадраты чисел, начиная с 45, так как $45^2 = 2025$. Рассмотрим число $46^2 = 2116$: $21 + 16 = 37$, $37^2 \neq 2116$. Продолжая перебор, получим $55^2 = 3025$: $30 + 25 = 55$, $55^2 = 3025$.

Задача 3-4. У торговца есть 81 монета, одна из которых фальшивая и легче остальных. Есть чашечные весы. Найдите минимальное число взвешиваний, гарантирующих обнаружение фальшивой монеты.

Ответ: 4.

Решение. Первым взвешиванием возьмём 27 первых монет с 27 последними монетами. Если какая-то из групп будет весить меньше, то в ней будет фальшивая монета; если же группы будут равны по весу, то фальшивая монета в оставшихся 27 монетах. Будем продолжать выполнять такие операции, то есть делить ту группу, в которой точно есть монета, на 3 равные группы.

4 — минимальное количество операций, так как каждая монета кодируется набором в троичной системе счисления. Всего различных кодов длины 3 — 27, так как на любую из трёх позиций можно поставить ровно 1 из 3 чисел, то есть $3^3 = 27$ способов. Тогда минимум нужно 4 взвешивания, и мы показали, что за 4 взвешивания можно распознать фальшивую монету.

Задача 3-5. В однокруговом шахматном турнире участвовали 30 шахматистов (победа — 1 очко, ничья — 0,5 очка, поражение — 0 очков). Разряд присвоен тем, кто набрал не менее 60% возможных очков. Какому наибольшему числу шахматистов могли присвоить разряд?

Ответ: 24.

Решение. 24 участника, сыгравшие между собой вничью и выигравшие у остальных 6. В таком случае каждый из 24 шахматистов набрал по $23 \cdot 0,5 + 6 \cdot 1 = 17,5$ очков, что больше 60% от возможных ($29 \cdot 0,6 = 17,4$).

Теперь поймём, почему больше 24 не могло быть. Пусть таких участников было хотя бы 25. Тогда они бы набрали в сумме не менее $25 \cdot 17,5 = 437,5$ очков, что больше, чем $30 \cdot 29 \cdot 0,5 = 435$ очков, разыгрываемых в турнире (в каждой партии суммарно разыгрывается 1 очко, всего партий $(30 \cdot 29)/2 = 435$).

Задача 3-6. В ряд выписаны девять девяток. Расставьте между ними знаки плюс, минус или умножение так, чтобы результат был равен 2025.

Решение. $999 + 999 + 9 + 9 + 9 = 2025$.

Задача 4-4. В классе 7 мальчиков и k девочек. Каждый мальчик дружит хотя бы с 7 девочками, а каждая девочка — не более чем с 4 мальчиками. Найдите наименьшее возможное k .

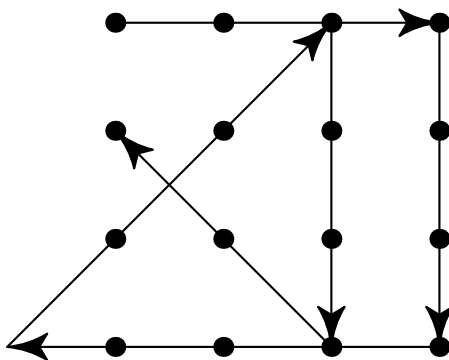
Ответ: 13.

Решение. *Оценка.* Общее число дружб между мальчиками и девочками не меньше $7 \cdot 7 = 49$ (каждый из 7 мальчиков дружит хотя бы с 7 девочками) и не больше $4k$ (каждая из k девочек дружит не более чем с 4 мальчиками). Следовательно, $4k \geq 49$, откуда $k \geq 13$.

Пример. Покажем, что $k = 13$ достижимо. Пронумеруем мальчиков $M_1, \dots, M_7$, девочек $G_1, \dots, G_{13}$. Для каждого мальчика M_i ($i = 1, \dots, 7$) зададим множество его друзей-девочек следующим образом: возьмём первых 7 девочек $G_1, \dots, G_7$ и для M_i выберем $G_i, G_{i+1}, G_{i+2}, G_{i+3}$ (индексы — остатки при делении 7). Тогда каждая из $G_1, \dots, G_7$ будет выбрана ровно 4 мальчиками. Оставшиеся 6 девочек $G_8, \dots, G_{13}$ разобьём на две группы по 3 и для каждого мальчика M_i выберем по 3 девочки так, чтобы каждая из них была выбрана не более 4 раз (например, циклически сдвигая тройки). Тогда каждый мальчик будет иметь $4 + 3 = 7$ друзей, а каждая девочка — не более 4.

Задача 4-5. Как, не отрывая карандаша от бумаги, провести шесть отрезков так, чтобы зачеркнуть все 16 точек в узлах квадратной сетки 4×4 ?

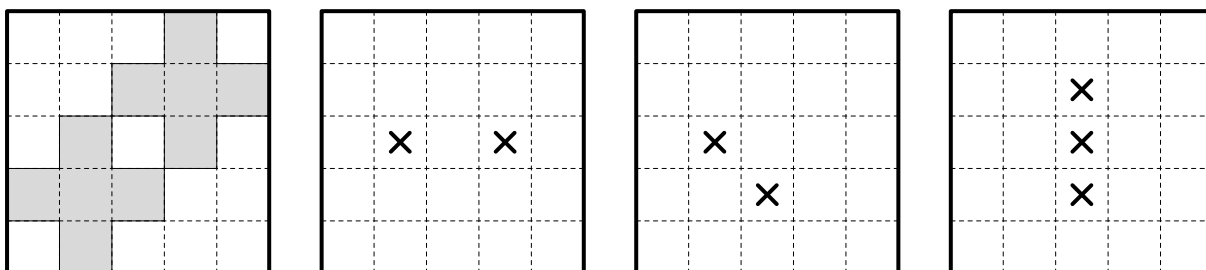
Решение.



Задача 4-6. В Древней Руси в морской бой играли по-другому. Корабль имеет форму креста из пяти клеток: центральная и четыре соседние по стороне. Какое минимальное число выстрелов нужно сделать на поле 5×5 , чтобы гарантированно попасть в такой корабль?

Ответ: 3.

Решение. Пример на 3 выстрела изображён на крайнем правом рисунке.



Докажем, что 2 выстрелов недостаточно. Рассмотрим два корабля из правого верхнего и левого нижнего угла. На них нужно потратить 2 выстрела. Тогда можно найти корабль, в котором нет отмеченной клетки. Значит, предположение неверно, и нельзя обойтись не более чем за два выстрела.

Задача 5-5. В шахматном турнире участвовали 8 человек, и в итоге они набрали разное количество очков (каждый играл с каждым один раз, победа — 1 очко, ничья — 0,5 очка, поражение — 0). Шахматист, занявший второе место, набрал столько же очков, сколько четверо последних набрали вместе. Как сыграли между собой шахматисты, занявшие третье и седьмое места?

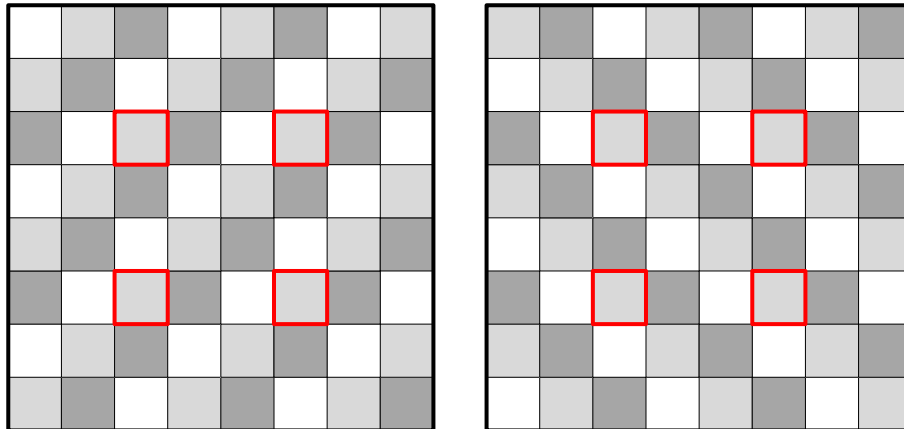
Ответ: третье место выиграло у седьмого.

Решение. Занявшие четыре последних места сыграли друг с другом 6 партий, разделив между собой 6 очков. Поэтому у шахматиста B , занявшего второе место, не может быть менее 6 очков. Докажем, что и более 6 очков у него быть не может. Действительно, 6,5 или 7 очков у него может быть только в одном случае: если он выиграл у всех игроков, занявших более низкие места, и не проиграл победителю. Но тогда количество очков победителя турнира будет не больше, чем у B . Следовательно, B набрал ровно 6 очков, значит, игроки, занявшие четыре последних места, проиграли все партии игрокам, занявшим места выше них. В частности, шахматист, занявший третье место, выиграл у шахматиста, занявшего седьмое место.

Задача 5-6. Из доски 8×8 вырезали одну клетку и оставшуюся доску удалось разрезать на полоски 1×3 . Какая клетка могла быть вырезана? Укажите все варианты. В ответ нарисуйте картинку со всеми возможными такими клетками.

Ответ: $c3, c6, f3, f6$.

Решение. Рассмотрим 2 диагональные раскраски в три цвета. Каждая полоска 1×3 для таких раскрасок занимает по одной клетке первого, второго и третьего цвета. При каждой из раскрасок на доске клеток первого цвета 21, второго тоже 21, а третьего — 22. Значит, вырезанная клетка должна быть светло-серой на каждой из раскрасок. Получаем 4 клетки: $c3, f3, c6, f6$.



Задача 6-6. Найдите наименьшее натуральное число, которое состоит из чётного количества цифр, стоящих строго в возрастающем порядке, делящееся на 11 (в числе 12 цифры стоят в строго возрастающем порядке, а, например, в числе 22 — нет).

Ответ: таких чисел нет.

Решение. Вспомним признак делимости на 11: знакопеременная сумма цифр должна нацело делиться на 11. Тогда и число делится на 11. Теперь поймём, что эта сумма должна быть равна 0, так как быть больше или меньше 0 она не может, потому что числа стоят в строго возрастающем порядке. Тогда сумма цифр на нечётных местах не может быть равна сумме цифр на чётных местах, так как цифра, стоящая на нечётном месте, всегда меньше числа, стоящего справа от него, по условию. Значит, таких чисел нет.

§3.2.2 Пенальти

Задача 1. В первой кучке 52 камня, что на 12 камней меньше, чем во второй кучке, а в третьей кучке на 19 камней больше, чем в первой. Сколько всего камней в трёх кучках?

Ответ: 187.

Решение. Во второй кучке $52 + 12 = 64$ камня, в третьей $52 + 19 = 71$ камень. Всего $52 + 64 + 71 = 187$ камней.

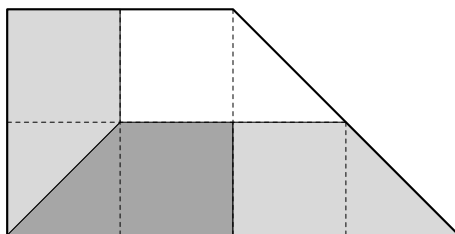
Задача 2. В команде мальчиков в шляпе столько же, сколько девочек без шляп. Кого в команде больше — мальчиков или людей без шляп?

Ответ: поровну.

Решение. Количество мальчиков равно числу мальчиков в шляпах плюс числу мальчиков без шляп. Количество людей без шляп равно числу мальчиков без шляп плюс числу девочек без шляп. По условию число мальчиков в шляпах равно числу девочек без шляп. Значит, оба количества равны.

Задача 3. Разрежьте данную фигуру на 4 равные части. Резать можно не обязательно по сторонам сетки. В качестве ответа нарисуйте искомое разрезание.

Решение.



Задача 4. Сколько существует способов расставить максимальное число коней на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга? (Способы, полученные поворотом доски, считаются одинаковыми.)

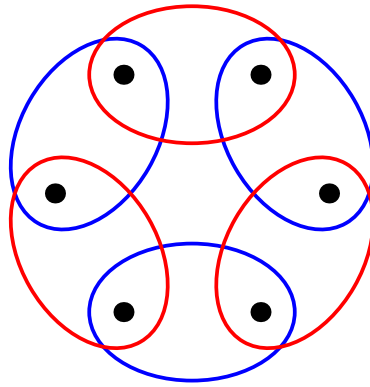
Ответ: 2.

Решение. 32 коня можно поставить на все белые клетки. Разобьём доску на 8 прямоугольников 4×2 , а каждый из них — на четыре пары клеток, соединённых ходом коня. Всего получилось 32 пары, и в каждой из них может стоять не более одного коня. Исходя из этого, можно понять, что максимум коней — 32, и все они должны стоять на клетках одного цвета. Значит, способов всего 2.

Задача 5. На ТЮМ_72 дети решают задачи в команде из 6 человек. Каждую команду посадили за отдельный круглый стол. Дети меняются местами со своим соседом раз в минуту. За какое наименьшее число пересадок каждый ребёнок сможет побывать на всех местах?

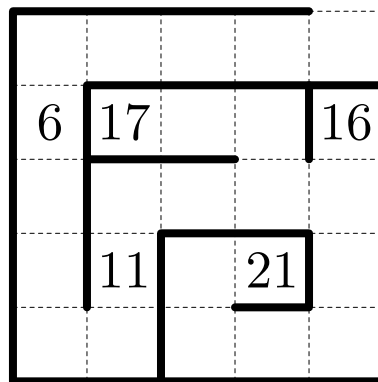
Ответ: 15.

Решение. Каждый из 6 ребят должен посидеть на 5 местах, а так как каждая перестановка меняет местами ровно 2 детей, то пересадок должно быть хотя бы $(6 \cdot 5)/2 = 15$ (делим на 2, так как в каждой пересадке участвуют 2 человека). Пример: ходом назовём пересадку детей в парах одного цвета: на чётных ходах меняем детей в синих парах, на нечётных — в красных парах.



Задача 6. Восстановите лабиринт 5×5 по числам, показывающим минимально возможное количество шагов до выхода из каждой клетки. Изначально стены лабиринта проходили по линиям сетки.

Решение.



Задача 7. Назовём фигуру Мамонт, если она может ходить только вправо или вверх на 1 клетку. Сколько у Мамонта есть способов попасть из левого нижнего угла доски 5×5 в правый верхний, если ему нельзя находиться выше главной диагонали.

Ответ: 14.

Решение. Рассмотрим таблицу 5×5 . В каждой клетке будем записывать число — количество способов попасть в эту клетку, то есть сумму числа слева и снизу. Однако учитываются лишь те способы, в которых мы не выходим за пределы главной диагонали, поэтому во всех клетках выше главной диагонали стоят нули. В итоге получаем такую таблицу:

0	0	0	0	14
0	0	0	5	14
0	0	2	5	9
0	1	2	3	4
1	1	1	1	1

В правой верхней клетке стоит число 14. Это и есть количество способов попасть из левого нижнего угла доски 5×5 в правый верхний, соблюдая правила задачи.

Задача 8. Есть 9 кучек монет: в первой 1 монета, во второй 2 монеты, в третьей — 3 и т.д. Настоящая монета весит 100 граммов, фальшивая — 101 грамм. Если хотя бы одна монета из кучки фальшивая, то и все остальные монеты из кучки будут фальшивые, причём эта кучка с фальшивыми монетами всего одна. За какое минимальное количество взвешиваний на цифровых весах можно определить все фальшивые монеты?

Ответ: 1.

Решение. Возьмём из 1-й кучки 0 монет, из 2-й кучки 1 монету, из 3-й — 2 и так далее. После того как мы поставим получившиеся монеты на весы, рассмотрим получившуюся массу. У этой суммарной массы рассмотрим последнюю цифру. Тогда поймём, что ровно столько в этой получившейся кучке фальшивых монет, а значит, изначально их было на 1 больше. Тогда мы однозначно восстановим кучку с фальшивыми монетами.

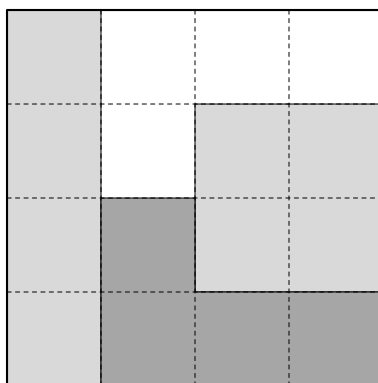
Задача 9. За круглым столом сидят 2025 человек. Каждый может быть рыцарем (всегда говорит правду) или лжецом (всегда лжёт). Каждому из них задали вопрос: "Среди твоих соседей ровно 1 рыцарь?" и каждый ответил "Да". Сколько могло сидеть рыцарей за столом?

Ответ: 1350 или 0.

Решение. Если рыцарей нет, то все лжецы, и их ответы «Да» ложны (так как среди соседей нет рыцарей), значит, этот случай подходит. Если рыцари есть, то рассмотрим произвольного рыцаря. У него ровно один сосед-рыцарь (иначе он бы не сказал правду). Значит, у каждого рыцаря есть ровно один сосед-рыцарь, поэтому рыцари разбиваются на пары соседей. Между двумя такими парами должен сидеть лжец (иначе у рыцаря было бы два соседа-рыцаря). Таким образом, расстановка имеет вид РРЛРРЛ... (два рыцаря, затем лжец). Следовательно, рыцарей две трети от всех, то есть $\frac{2}{3} \cdot 2025 = 1350$.

Задача 10. Дан клетчатый квадрат 4×4 . Егор разрезал его по линиям сетки на 4 равные по площади части. Могли ли у него получиться 4 различных многоугольника? Если можно, то покажите как. (Многоугольники считаются одинаковыми, если они совпадают при повороте.)

Решение.



Задача 11. Сколько существует трёхзначных чисел, в которых цифры идут в неубывающем порядке?

Ответ: 165.

Решение. Заметим, что цифру 0 мы использовать не можем, так как число трёхзначное. Теперь давайте произвольно выбирать 3 цифры из набора от 1 до 9. Из них однозначно строится число в неубывающем порядке.

Количество способов выбрать 3 цифры из 9 с повторениями равно

$$C_{9+3-1}^3 = C_{11}^3 = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{6} = 165.$$

Задача 12. Найдите наибольшее число из различных цифр, где любые две соседние цифры образуют простое число (например, в числе 179 рассматриваются числа 17 и 79).

Ответ: 89731.

Решение. Заметим, что чётная цифра не может стоять не первой, так как иначе образованное число будет чётным, то есть делиться на 2. Аналогично, цифра 5 может стоять только первой, так как иначе найдётся число, оканчивающееся на 5, то есть кратное 5.

Так как нам нужно наибольшее число, то в нашем числе должно быть наибольшее число знаков и первая цифра должна быть наибольшей. Рассмотрим несколько случаев. Если первая цифра 9, то наше число имеет в своей записи не более 4 знаков. Если первая цифра чётная, то знаков в числе не более 5, так как нечётных чисел, кроме 5, ровно 4. Возьмём самую большую цифру из возможных, чтобы наше число было пятизначным, то есть 8, и начнём составлять число так, чтобы оно соответствовало условию. Таким образом получим число 89731, в котором числа 89, 97, 73 и 31 простые.

Задача 13. На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 125. Разрешается стереть любые два числа a и b , а вместо них записать число $(a + b - 1)$. Какое число останется на доске после 124 таких операций?

Ответ: 7751.

Решение. При каждой операции сумма чисел на доске уменьшается на 1. Изначально она равна 7875. Следовательно, через 124 операции она станет равна $7875 - 124 = 7751$.

Задача 14. Решите уравнение в различных натуральных числах

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} = 1.$$

Найдите хотя бы одно значение $a + b$.

Ответ: 5 при $a = 2$, $b = 3$.

Решение.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3 + 2 + 1}{6} = 1.$$

Задача 15. В каждой клетке квадрата 3×3 стоит «проверяющий». Каждый «проверяющий» может быть либо рыцарем (всегда говорит правду), либо лжецом (всегда лжёт). Каждый «проверяющий» заявил, что все его соседи по стороне клетки — лжецы. Какое максимальное количество рыцарей может быть среди «проверяющих»?

Ответ: 5.

Решение. *Оценка.* Разобьём квадрат 3×3 на четыре доминошки 1×2 и одну клетку 1×1 . Заметим, что в доминошке не может стоять больше одного рыцаря, так как иначе там стоят два рыцаря, имеющих среди соседей другого рыцаря, то есть они лгут, что противоречит условию. В клетке 1×1 не может стоять больше одного рыцаря, так как там стоит всего один проверяющий. Таким образом, в каждой из пяти фигур может стоять не больше 1 рыцаря, следовательно, во всём квадрате может стоять не больше 5 рыцарей.

Пример.

Р		Р
	Р	
Р		Р

Задача 16. Егор всегда лжёт, а Рома всегда говорит правду. Какой вопрос надо было бы им задать, чтобы они дали на него одинаковые ответы?

Ответ: например, "Тебя зовут Рома?" (или "Ты Егор?" с противоположным ответом).

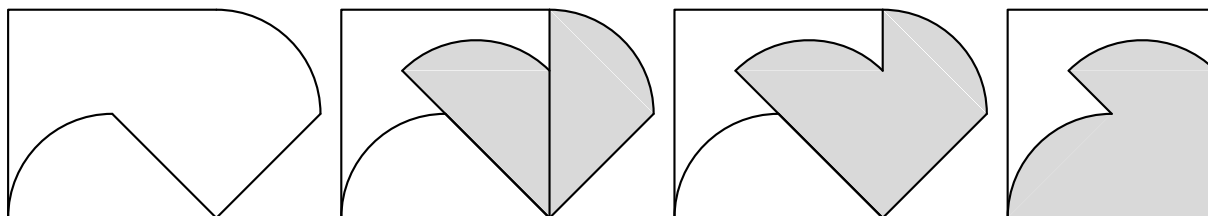
Решение. Если спросить Егора "Тебя зовут Рома?", он, будучи лжецом, ответит "Да" (потому что правда — "Нет"). Если спросить Рому "Тебя зовут Рома?", он, будучи рыцарем, ответит "Да". Оба ответят одинаково.

§3.3 6 класс

§3.3.1 Домино

Задача 0-0. На рисунке показано, как фигуру разрезать на 2 части, из которых можно сложить квадрат. Разрежьте эту фигуру другим способом на 2 части так, чтобы из них можно было сложить квадрат.

Решение.



Задача 0-1. Представьте число 2025 в виде суммы нескольких различных делителей числа 2024.

Решение. Например, $2025 = 2024 + 1$.

Задача 0-2. Пусть $L(N)$ — количество букв в написании числа N . Чему равно $L(L(L(2025)))$? (Например, 6 — Ш, Е, С, Т, Ъ, 5 букв, поэтому $L(6) = 5$.)

Ответ: 10.

Решение. $L(2025) = 21$, $L(L(2025)) = L(21) = 12$, $L(L(L(2025))) = L(12) = 10$.

Задача 0-3. Найдите какие-нибудь три натуральных числа a , b , c таких, что:

$$a^3 + b^3 + c^3 = (abc)^2.$$

Ответ: например, $(1, 2, 3)$.

Решение. $1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36 = (1 \cdot 2 \cdot 3)^2$.

Задача 0-4. В футбольном турнире из пяти команд по системе 3-1-0 победитель набрал столько очков, сколько все остальные вместе взятые. Сколько ничьих было в этом турнире?

Ответ: 6.

Решение. Победитель может набрать максимум 12 очков (четыре победы). Остальные четыре команды играют между собой 6 матчей, в каждом из которых разыгрывается не менее 2 очка. Значит, их суммарный счёт не меньше 12. Чтобы победитель набрал столько же, сколько остальные, необходимо, чтобы он набрал ровно 12 очков (выиграл у всех), а все матчи между остальными командами завершились вничью. Следовательно, ничьих было ровно 6.

Задача 0-5. С 1 сентября четыре школьника начали посещать кинотеатр. Первый бывал в нем каждый четвёртый день, второй — каждый пятый, третий — каждый шестой и четвёртый — каждый девятый. Когда второй раз все школьники встретятся в кинотеатре?

Ответ: через 180 дней после 1 сентября.

Решение. Наименьшее общее кратное чисел 4, 5, 6, 9 равно 180.

Задача 0-6. Назовём натуральное число k «красивым», если оно делится на первые $\frac{k}{72}$ ($\frac{k}{72}$ — натуральное число) простых чисел. Найдите все такие числа.

Ответ: 72 и 144.

Решение. Пусть $k = 72x$. Тогда k должно делиться на первые x простых чисел. В частности, k должно делиться на x -е простое число p_x . Но $p_x > x$ для всех $x \geq 2$ (так как среди чисел от 2 до x не может быть x простых). Следовательно, $k = 72x$ должно делиться на число p_x , большее x . Это возможно только если p_x входит в разложение 72, то есть $p_x = 2$ или $p_x = 3$. Значит, $x \leq 2$ (так как третье простое число — 5). При $x = 1$ получаем $k = 72$, при $x = 2$ — $k = 144$, оба варианта подходят.

Задача 1-1. В Чемпионате России по шахматам каждый играет с каждым один раз. Сколько партий, если участников 18?

Ответ: 153.

Решение. Каждый участник должен сыграть 17 партий, в каждой партии играют двое. Значит, всего партий $18 \cdot 17 : 2 = 153$.

Задача 1-2. Найдите наибольшее шестизначное число $\overline{\Phi\text{МШЛ}\text{АВ}}$, в котором разные буквы обозначают разные цифры и

$$\Phi \cdot \text{М} \cdot \text{Ш} = \text{Л} \cdot \text{А} \cdot \text{В}.$$

Ответ: 981643.

Решение. Чтобы число было максимальным, возьмём $\Phi = 9$, $\text{М} = 8$. Наибольшее возможное $\text{Ш} = 7$, но $72 \cdot 7 = 504$ не раскладывается в произведение трёх различных цифр. При $\text{Ш} = 6$: $432 = 6 \cdot 8 \cdot 9$ — но 9 уже занято. При $\text{Ш} = 5$: $360 = 5 \cdot 8 \cdot 9$ — 9 занято. При $\text{Ш} = 4$: $288 = 4 \cdot 8 \cdot 9$ — 9 занято. При $\text{Ш} = 3$: $216 = 3 \cdot 8 \cdot 9$ — 9 занято. При $\text{Ш} = 2$: $144 = 2 \cdot 8 \cdot 9$ — 9 занято. При $\text{Ш} = 1$: $72 = 3 \cdot 4 \cdot 6$. Тогда Л , А , В — это 3, 4, 6. Для максимальной числа после 9, 8, 1 ставим 6, затем 4, затем 3. Получаем 981643.

Задача 1-3. Решите ребус:

$$\overline{ABC} + \overline{AC} + \overline{A} = \overline{BCC},$$

где разным буквам соответствуют разные цифры.

Ответ: $A = 6$, $B = 7$, $C = 4$.

Решение. Запишем равенство в виде

$$(100A + 10B + C) + (10A + C) + A = 100B + 10C + C.$$

Приведём подобные:

$$111A + 10B + 2C = 100B + 11C,$$

откуда

$$111A = 90B + 9C.$$

Разделим на 3:

$$37A = 30B + 3C.$$

Так как правая часть делится на 3, то и левая тоже, значит, A кратно 3. Поскольку A — цифра, возможны только $A = 3, 6, 9$.

Если $A = 3$, то $111 = 30B + 3C$, откуда $37 = 10B + C$. Так как $C \leq 9$, то $10B \geq 28$, значит, $B = 3$, но тогда $A = B$ — противоречие.

Если $A = 6$, то $222 = 30B + 3C$, откуда $74 = 10B + C$. Единственное решение: $B = 7$, $C = 4$, что подходит.

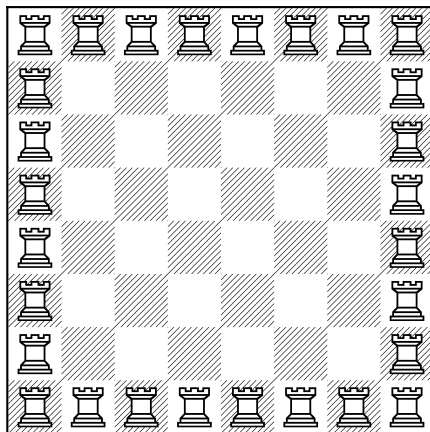
Если $A = 9$, то $333 = 30B + 3C$, откуда $111 = 10B + C$, что невозможно при $B \leq 9$.

Таким образом, $A = 6$, $B = 7$, $C = 4$.

Задача 1-4. Какое наибольшее число ладей можно расставить на шахматной доске так, чтобы каждая была не более трёх других?

Ответ: 28.

Решение. *Оценка.* Всего на доске 32 стенки, которые ладья может бить (по 8 клеток на каждой из 4 сторон). Если ладья бьёт не более трёх других ладей, то у неё есть хотя бы одна стенка в одном из направлений. Рассмотрим четыре ладьи, которые являются крайними в своих направлениях: самую левую среди самых верхних, самую правую среди самых верхних, самую левую среди самых нижних и самую правую среди самых нижних. Каждая из них бьёт как минимум две стенки. Остальные ладьи бьют хотя бы одну стенку. Суммарное число «битых» стенок не превосходит. Если N — общее число ладей, и среди них 4 крайних, то $4 \cdot 2 + (N - 4) \cdot 1 \leq 32$, откуда $N \leq 28$. *Пример.*



Задача 1-5. Чему равен угол между часовой и минутной стрелками в 3 часа 14 минут? Ответ дайте в градусах.

Ответ: 13° .

Решение. Минутная стрелка за 14 минут прошла $(14/60) \cdot 360^\circ = 84^\circ$ от 12 часов. Часовая стрелка за 3 часа 14 минут прошла $3 \cdot 30^\circ + (14/60) \cdot 30^\circ = 90^\circ + 7^\circ = 97^\circ$. Разность $97^\circ - 84^\circ = 13^\circ$.

Задача 1-6. Тридцать школьников, шестиклассников и семиклассников, обменялись рукопожатиями. При этом оказалось, что каждый шестиклассник пожал руку восьми семиклассникам, а каждый семиклассник пожал руку семи шестиклассникам. Сколько было шестиклассников и семиклассников?

Ответ: 14 шестиклассников и 16 семиклассников.

Решение. Пусть шестиклассников x , тогда семиклассников $30 - x$. Сделаем двойной подсчёт числа рукопожатий между ними:

$$8x = 7(30 - x) \implies 8x = 210 - 7x \implies 15x = 210 \implies x = 14.$$

Значит, шестиклассников 14, семиклассников 16.

Задача 2-2. Можно ли изобразить на плоскости девять отрезков так, чтобы каждый пересекал ровно три других? (При положительном ответе приведите пример.)

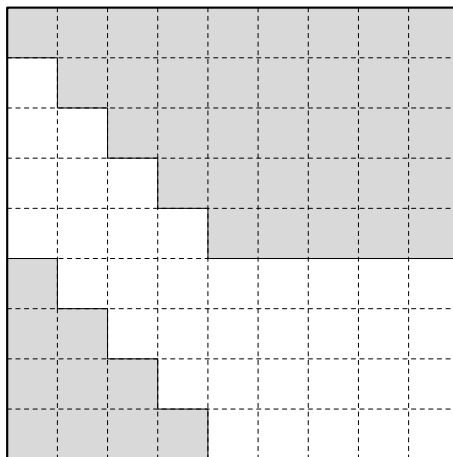
Ответ: Нет.

Решение. Предположим, что это правда. Подсчитаем число пересечений. Если каждый из 9 отрезков пересекает ровно 3 других, то суммарное число пересечений равно $9 \cdot 3 = 27$. Но

каждое пересечение считается дважды (для двух отрезков), значит, общее число пересечений должно быть $27/2 = 13,5$, что не является целым числом. Противоречие.

Задача 2-3. Закрасьте несколько клеток в таблице 9×9 так, чтобы во всех столбцах было равное количество закрашенных клеток, а во всех строках — различное.

Решение.



Задача 2-4. Найдите семь различных натуральных чисел, сумма которых делится на любое из них, и при этом она меньше 50.

Ответ: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 24.

Решение. $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 8 + 24 = 48$.

Задача 2-5. Все натуральные числа с суммой цифр 2025 упорядочили по возрастанию. Найдите 226-е число в этом ряду.

Ответ: 1999...998 (224 девятки).

Решение. Наименьшее число состоит из 225 девяток. Затем идут числа, начинающиеся с 1; у них сумма оставшихся 225 цифр равна 2024, то есть среди них 224 девятки и одна 8. Таких чисел ровно 225 (выбираем позицию для 8). Они занимают места со 2-го по 226-е включительно. Следовательно, 226-е число — это наибольшее среди чисел с первой цифрой 1, то есть 1999...98 (224 девятки).

Задача 2-6. Вася задумал трёхзначное натуральное число. Он посчитал остатки при делении этого числа на 2, 4, 6, 8, 10, 12 и сложил их. У него получилось 36. Какое число мог задумать Вася? (Приведите все примеры.)

Ответ: $120k - 1$, где k от 1 до 8.

Решение. Максимальная сумма остатков равна $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$. Это достигается только если число даёт остаток 1 при делении на 2, 3 на 4, 5 на 6, 7 на 8, 9 на 10, 11 на 12, то есть число на 1 меньше кратного каждому из этих чисел. Наименьшее общее кратное 2, 4, 6, 8, 10, 12 равно 120. Значит, число имеет вид $120k - 1$. Трёхзначные: при $k = 1$ — 119, $k = 2$ — 239, ..., $k = 8$ — 959. Всего 8 чисел.

Задача 3-3. В турнире по футболу участвуют 52 команды. Команда выбывает после второго поражения. Турнир продолжается, пока не останется одна команда. Сколько может быть сыграно матчей? Укажите все варианты.

Ответ: 102 или 103.

Решение. После окончания у победителя может быть 0 или 1 поражение, у всех остальных — ровно 2 поражения. Каждый матч добавляет ровно 1 поражение в общую копилку. Если победитель без поражений, то поражений всего $2 \cdot 51 = 102$, значит, матчей 102. Если победитель с одним поражением, то поражений $2 \cdot 51 + 1 = 103$, значит, матчей 103.

Задача 3-4. На столе лежат 5 красных, 25 синих и 1 зелёная карточка (цвет не виден). Какое наименьшее число карточек нужно перевернуть, чтобы среди них наверняка было разное количество красных, синих и зелёных?

Ответ: 28.

Решение. *Оценка.* Если перевернуть не более 27 карточек, то может оказаться, что либо среди них 1 красная и 1 зелёная, а все остальные синие, либо все синие (тогда красных и зелёных поровну 0). Значит, 27 карточек недостаточно. *Пример.* Перевернём 28 карточек. Синих среди них не более 25, значит, красных и зелёных вместе не менее 3. Если красных и зелёных поровну, то их общее количество чётно, но не может быть равно 2 и 0 (единственные возможные чётные значения), противоречие. Значит, поровну быть не может. Следовательно, количества красных, синих и зелёных различны.

Задача 3-5. У Серёжи и Лены есть несколько шоколадок, каждая весом не более 100 г. Как бы они ни разделили шоколадки, у одного из них суммарный вес не будет превосходить 100 г. Каков наибольший возможный общий вес всех шоколадок?

Ответ: 300 г.

Решение. *Оценка.* Отдадим все шоколадки Серёже и будем перекладывать их по одной Лене. В некоторый момент вес Лены станет не меньше веса Серёжи. Пусть перед этим перекладыванием у Серёжи было A г, у Лены — B г, а перекладываемая шоколадка весит C г. По условию $A \leq 100$, а до перекладывания у Лены было $B \leq 100$ (иначе у неё уже был бы вес больше 100). Тогда общий вес всех шоколадок равен

$$A + B + C \leq 100 + 100 + 100 = 300 \text{ г.}$$

Пример. Три шоколадки по 100 г: при любом разделении у одного из них будет либо 100 г (если одна шоколадка), либо 200 г (если две).

Задача 3-6. Сколько среди дробей

$$\frac{50}{2}, \frac{49}{3}, \dots, \frac{2}{50}$$

сократимых?

Ответ: 27.

Решение. У каждой дроби сумма числителя и знаменателя равна $52 = 2^2 \cdot 13$. Если дробь сократима, то её числитель и знаменатель имеют общий простой делитель $d > 1$, который также делит их сумму, то есть d делит 52. Значит, $d = 2$ или $d = 13$. Рассмотрим два случая. Если числитель нечётный, то и знаменатель нечётный, поэтому d не может быть 2; остаётся $d = 13$. Таких дробей ровно две: $13/39$ и $39/13$. Если числитель чётный, то и знаменатель чётный, значит, дробь сократима на 2. Чётных числителей в последовательности 50, 49, ..., 2 ровно 25 (от 2 до 50 включительно). Все они дают сократимые дроби. Итого $25 + 2 = 27$.

Задача 4-4. В ребусе

$$\text{ТЮМ} + \text{ТЮМ} + \text{ТЮМ} + \dots + \text{ТЮМ} = \text{ТЮМЕНЬ}$$

одинаковые буквы заменяют одинаковые цифры, разные буквы заменяют разные цифры. Часть одинаковых слагаемых заменена многоточием. Сколько всего может быть $\overline{\text{ТЮМ}}$ ов, чтобы ребус имел решение? Найдите наименьшее и наибольшее количества.

Ответ: 1002, 1009.

Решение. Пусть $x = \overline{\text{ТЮМ}}$, $y = \overline{\text{ЕНБ}}$. Тогда $nx = 1000x + y$, то есть $(n - 1000)x = y$. Так как y — трёхзначное число (цифры разные и не равны цифрам x), то $1 \leq n - 1000 \leq 9$. Значит, n может быть от 1001 до 1009. Однако y должно быть трёхзначным и все цифры различны и отличны от цифр x . Проверим. При $n = 1001$: $y = x$, но тогда цифры повторяются, не подходит. При $n = 1002$: $y = 2x$, например, $x = 135$, $y = 270$ — подходит. При $n = 1009$: $y = 9x$, например, $x = 103$, $y = 927$ — подходит. Значит, наименьшее n равно 1002, а наибольшее — 1009.

Задача 4-5. Волейбольная сетка имеет вид прямоугольника размером 50×600 клеток. Какое наибольшее число верёвочек можно перерезать так, чтобы сетка не распалась на куски?

Ответ: 30000.

Решение. Пусть сетка — это граф: вершины — узлы, рёбра — верёвочки. Нужно удалить максимальное число рёбер, сохранив связность. Если в графе есть цикл, то возможно удаление любого ребра этого цикла. Связный граф без циклов — дерево. Изначально рёбер: $601 \cdot 50 + 600 \cdot 51 = 60650$. Вершин: $601 \cdot 51 = 30651$. В дереве рёбер на 1 меньше, чем вершин, то есть 30650. Значит, можно удалить $60650 - 30650 = 30000$ рёбер.

Задача 4-6. В стране рыцарей (всегда говорят правду) и лжецов (всегда лгут) за круглым столом сидят в вершинах правильного десятиугольника 10 человек, среди которых есть лжецы. Путешественник может встать в любую точку и спросить каждого: "Каково расстояние от меня до ближайшего лжеца среди вас?" После этого каждый отвечает ему. Какое минимальное количество вопросов должен задать путешественник, чтобы гарантированно узнать всех лжецов?

Ответ: 2.

Решение. *Пример.* Первый вопрос зададим из произвольной точки. Если все ответы на него одинаковы, то все сидящие за столом — лжецы, поскольку рыцарь и лжец не могут дать одинаковый ответ (рыцарь скажет правду, лжец — ложь). В противном случае найдутся соседи, ответившие по-разному. Встанем в середину дуги между ними. Так как хотя бы один из двоих — лжец, то расстояние до ближайшего лжеца становится известно. Тогда те, кто назвал это расстояние, являются рыцарями, а остальные — лжецами.

Оценка. Пусть задан только один вопрос. Разобьём людей на группы по расстоянию от путешественника (групп больше одной, так как встать в центр стола нельзя). Пусть ближайшая группа указала на следующую за ней, а все остальные — на ближайшую. Тогда возможны две симметричные ситуации: либо ближайшая группа — рыцари, а остальные — лжецы, либо наоборот. В обоих случаях ответы будут одинаковыми, значит, одного вопроса недостаточно.

Задача 5-5. Листочки с числами от 1 до 50 разбили на десять равных групп и в каждой группе выбрали среднее по величине число. Какова наименьшая возможная сумма выбранных чисел?

Ответ: 165.

Решение. *Оценка.* В каждой пятёрке чисел $a < b < c < d < e$ среднее c . Тогда $a \leq c - 2$,

$b \leq c - 1$, значит,

$$a + b + c \leq 3c - 3 \implies c \geq \frac{a + b + c}{3} + 1.$$

Суммируя по всем 10 группам, получаем, что сумма средних не меньше

$$\frac{1}{3}(1 + 2 + \dots + 30) + 10 = 155 + 10 = 165.$$

Пример. Чтобы получить сумму 165, нужно брать тройки $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$, $\dots$, $(28, 29, 30)$, а остальные числа распределить произвольно. Тогда средние будут 3, 6, $\dots$, 30, их сумма $3 + 6 + \dots + 30 = 165$.

Задача 5-6. В ряд стоят 1999 чисел. Первое число равно 1. Известно, что каждое число, кроме первого и последнего, равно сумме двух соседних. Найдите последнее число.

Ответ: 1.

Решение. Обозначим наши числа через $a_1, a_2, \dots, a_{1999}$. Складывая равенства

$$a_{n+1} = a_{n+2} + a_n, \quad a_{n+2} = a_{n+3} + a_{n+1},$$

получим $a_{n+3} + a_n = 0$, или $a_{n+3} = -a_n$. Отсюда

$$a_{n+6} = -a_{n+3} = a_n,$$

то есть последовательность имеет период 6. Поэтому

$$a_{1999} = a_{6 \cdot 333 + 1} = a_1 = 1.$$

Задача 6-6. Найдите какие-нибудь три положительных различных рациональных числа x , y , z таких, что:

$$(x + y + z)^6 = xyz.$$

Ответ: например, $(1/8, 1/27, 1/216)$.

Решение.

$$x + y + z = \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{216} = \frac{27}{216} + \frac{8}{216} + \frac{1}{216} = \frac{36}{216} = \frac{1}{6}.$$

Тогда

$$(x + y + z)^6 = \left(\frac{1}{6}\right)^6 = \frac{1}{46656}.$$

Осталось убедиться, что

$$xyz = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{216} = \frac{1}{46656}.$$

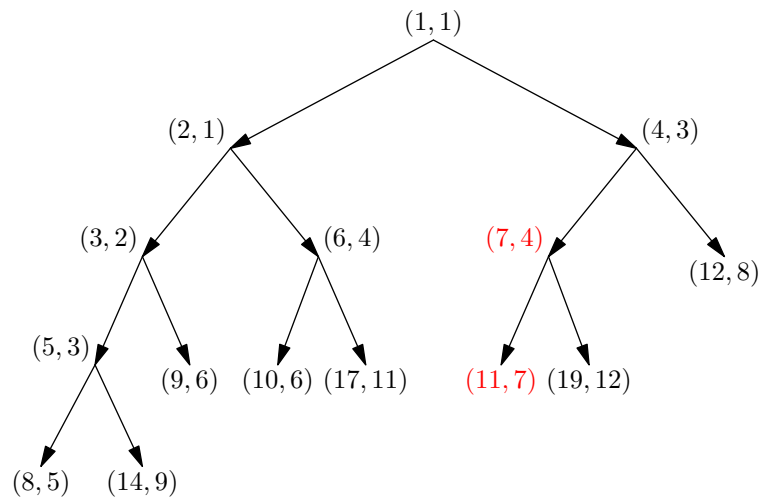
Следовательно, равенство выполняется.

§3.3.2 Пенальти

Задача 1. На доске написана пара чисел $(1, 1)$, за один ход можно заменить пару (x, y) на $(x + y, x)$ или на пару $(2x + y + 1, x + y + 1)$. Через несколько ходов на доске оказалась пара, в которой есть число 7. Какая пара записана на доске? (Укажите все варианты ответов.)

Ответ: $(11, 7)$ и $(7, 4)$.

Решение. Переберём варианты:

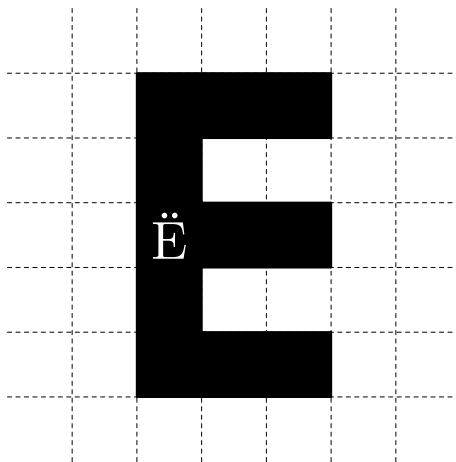


Задача 2. Петя захотел рассчитаться за кисть винограда стоимостью 20 рублей, у него в карманах лежало много монет по 2, 5 и 7 рублей. Сколькими способами он может приобрести желаемое без сдачи?

Ответ: 5.

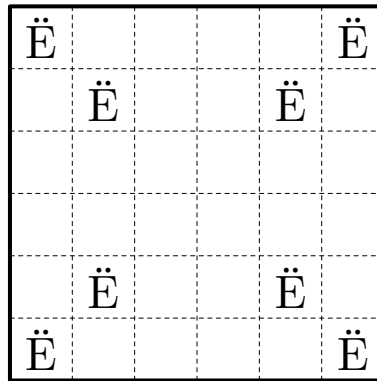
Решение. Решаем уравнение $2x + 5y + 7z = 20$ в целых неотрицательных числах. Перебор по $z < 3$: при $z = 2$ даёт $x = 3, y = 0$; при $z = 1$ — $x = 4, y = 1$; при $z = 0$ — y чётно, то есть $y = 0, 2, 4$, что даёт $x = 10, 5, 0$ соответственно. Всего $1 + 1 + 3 = 5$ способов.

Задача 3. Введём новую шахматную фигуру — «ёж». Он бьёт как показано на рисунке (и только в этом направлении). Какое наибольшее количество не бьющих друг друга «ежей» можно расставить на доске 6×6 ? (Укажите ответ и пример.)



Ответ: 8.

Решение. *Оценка.* Разобьём доску на 4 квадрата 3×3 . В каждом таком квадрате помещается не более двух ежей, значит, всего не более 8. *Пример.*



Задача 4. Укажите число, в десятичной записи которого нет 0, при этом оно делится на 45, его сумма цифр делится на 45 и произведение его цифр также делится на 45. (Десятичная запись числа — привычная нам форма записи чисел цифрами от 0 до 9, причём числа не начинаются с нуля.)

Решение. Например, 135135...135 (число 135 записано 45 раз).

Задача 5. У Пети есть 4 палочки. Самая короткая имеет длину 2, следующая — длину 2,5. Известно, что ни из каких трёх палочек нельзя составить треугольник. Какая наименьшая возможная сумма длин двух самых длинных палочек? (Из 3 отрезков можно составить треугольник тогда и только тогда, когда сумма длин любых двух из этих отрезков больше длины третьего.)

Ответ: 11,5.

Решение. Пусть длины двух самых длинных палочек равны c и d . Из неравенства треугольника следует, что $c \geq 2 + 2,5 = 4,5$, а $d \geq 2,5 + c \geq 7$. Тогда $c + d \geq 4,5 + 7 = 11,5$.

Задача 6. Кубик окрасили, а потом распилили на 27 одинаковых кубиков. Во сколько раз общая площадь неокрашенной поверхности этих кубиков больше общей площади их окрашенной поверхности?

Ответ: в 2 раза.

Решение. Пусть сторона маленького кубика 1, тогда сторона большого куба равна 3 (так как $3^3 = 27$). Площадь его окрашенной поверхности: $6 \cdot 3^2 = 54$. Общая площадь поверхности всех 27 маленьких кубиков: $27 \cdot 6 \cdot 1^2 = 162$. Неокрашенная площадь: $162 - 54 = 108$. Отношение неокрашенной площади к окрашенной: $108 : 54 = 2$. Значит, неокрашенная поверхность больше окрашенной в 2 раза.

Задача 7. Винни-Пух, Сова, Кролик и Пятачок съели 70 бананов, причём каждому досталось хотя бы по одному банану. Винни-Пух съел больше, чем каждый из остальных; Сова и Кролик вместе съели 45 бананов. Сколько бананов съел Пятачок?

Ответ: 1.

Решение. Пусть Сова съела s бананов, Кролик — k , Винни-Пух — v , Пятачок — p . Тогда $s + k + v + p = 70$, $s + k = 45$, откуда $v + p = 25$. При этом либо s , либо k не меньше 23, иначе $s + k < 45$. Но Винни-Пух съел больше всех, следовательно, $v \geq 24$. Пятачок съел хотя бы 1 банан, а значит, $v \leq 24$. Следовательно, $v = 24$, откуда $p = 1$.

Задача 8. Квадрат со стороной 10 разрезан по линиям сетки на 10 прямоугольников одинакового периметра. Найдите максимальное возможное значение периметра.

Ответ: 22.

Решение. Просуммируем периметры всех прямоугольников. Линии сетки внутри квадрата могут учитываться дважды: их $9 \cdot 10 \cdot 2$, граница квадрата — 1 раз, то есть сумма периметров не больше $9 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 2 + 40 = 400$. Но у нас 10 прямоугольников, внутри прямоугольника площади x не меньше $x - 1$ линий сетки. Сумма площадей прямоугольников равна 100, их 10, то есть внутри не менее 90 линий сетки. Так как до этого мы посчитали все линии сетки внутри квадрата дважды, а эти 90 не принадлежат сторонам прямоугольников, то вычтем их, тоже дважды. $400 - 90 \cdot 2 = 220$ — максимальная сумма периметров, то есть максимальное $P = 22$. В качестве примера — разрезание квадрата на вертикальные прямоугольники 1×10 .

Задача 9. На доске написаны числа $1, 2, 3, \dots, 125$. Разрешается стереть любые два числа a и b и вместо них записать число $a + b - 1$. Какое число останется на доске после 124 таких операций?

Ответ: 7751.

Решение. При каждой операции сумма чисел на доске уменьшается на 1. Изначально она равна 7875. Следовательно, через 124 операции она станет равна $7875 - 124 = 7751$.

Задача 10. Найдите какое-нибудь решение ребуса

$$\text{СУК} \cdot \text{СУК} = \text{БАРСУК}$$

(разные буквы — разные цифры).

Ответ: например, $625 \cdot 625 = 390625$.

Задача 11. Найдите сумму цифр числа

$$6 + 66 + 606 + \dots + \underbrace{60\dots06}_{88}.$$

Ответ: 525.

Решение. Всего 90 слагаемых, каждое состоит из двух шестёрок и нулей между ними. Сумма равна

$$\begin{aligned} 6 + 66 + 606 + \dots + \underbrace{60\dots06}_{88} &= 0 + 60 + 600 + \dots + \underbrace{60\dots0}_{88} + 6 \cdot 90 \\ &= \underbrace{66\dots660}_{90} + 6 \cdot 90 \\ &= \underbrace{66\dots667200}_{86}. \end{aligned}$$

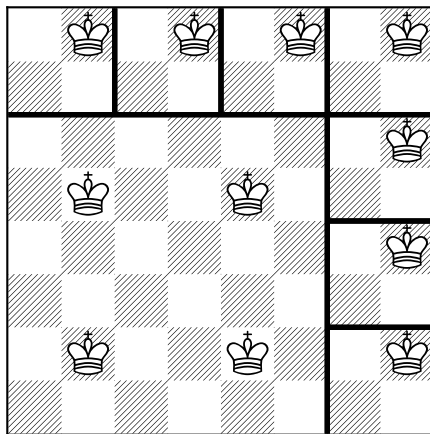
Значит, сумма цифр равна $6 \cdot 86 + 7 + 2 = 516 + 9 = 525$.

Задача 12. На шахматную доску поставили четыре короля, не бьющих друг друга. Какое наибольшее количество королей ещё можно гарантированно поставить на доску так, чтобы все поставленные короли не били друг друга?

Ответ: 7.

Решение. *Оценка.* Сначала приведём пример, показывающий, что 8 королей гарантировать нельзя. Расставим четырех исходных королей в левом нижнем квадрате 6×6 как на рисунке. Тогда в оставшуюся Г-образную фигуру можно поместить не более 7 королей.

Пример. Докажем, что при любой начальной расстановке 4 королей на доску всегда можно поставить ещё хотя бы 7 королей. Заметим, что каждый из 4 поставленных королей



сделал запретными для постановки других королей не более 9 клеток в виде квадрата 3×3 вокруг себя. Значит, 4 короля делают запретными не более $4 \cdot 9 = 36$ клеток, и не менее $64 - 36 = 28$ клеток являются доступными для постановки дополнительных королей. Раскрасим всё поле в четыре цвета квадратами 2×2 . Тогда по принципу Дирихле из 28 доступных клеток не менее 7 будут одного из цветов. Поставим королей на все доступные клетки этого цвета. Эти поставленные короли (не менее 7 штук) вместе с 4 уже стоящими образуют набор королей, не бьющих друг друга.

Задача 13. У скольких 2023-значных чисел произведение цифр равно 2023?

Ответ: таких чисел нет.

Решение. $2023 = 17^2 \cdot 7$, но ни одна цифра не делится на 17.

Задача 14. Сколько существует различных прямоугольников с целочисленными сторонами и периметром 2026?

Ответ: 506.

Решение. Периметр равен $2(a + b)$, где a и b — стороны прямоугольника, а значит, $a + b = 1013$. Следовательно, меньшая сторона может быть равна 1, 2, ..., 506.

Задача 15. Первая цифра четырёхзначного числа равна остатку от деления числа на 2, вторая — на 3, третья — на 4, четвёртая — на 5. Найдите все такие числа.

Ответ: таких чисел нет.

Решение. Первая цифра не может быть 0, значит, она равна 1 (остаток от деления на 2), следовательно, число нечётное. Последняя цифра (остаток от деления на 5) может быть 1 или 3. Третья цифра — остаток от деления на 4 — тоже 1 или 3. Перебор последних двух цифр даёт только 13 и 31 (остаток от деления на 4). Затем проверка второй цифры показывает, что подходящих чисел нет.

Задача 16. В ТЮМляндии все номера телефонов начинаются на 690 и состоят из 10 различных цифр. Какое наибольшее количество номеров телефонов в ТЮМляндии может делиться на 15?

Ответ: 720.

Решение. Сумма всех цифр равна 45, значит, любой номер делится на 3. Для делимости на 15 нужно, чтобы последняя цифра была 5 или 0. Но 0 уже есть в начале (в 690), значит, последняя цифра — 5. Оставшиеся 6 позиций можно заполнить $6! = 720$ способами.

§3.4 7 класс

§3.4.1 Домино

Задача 0-0. Найдите все натуральные n , для которых $n^3 + 3n + 2$ делится на $n^2 + n + 1$.

Ответ: $n = 1$.

Решение. Заметим, что $n^3 + 2n^2 + 5n + 4 = n^3 + 3n + 2 + 2(n^2 + n + 1)$ делится на $n^2 + n + 1$ и получившееся уравнение имеет корень -1 , тогда $n^3 + 2n^2 + 5n + 4 = n^3 + n^2 + n^2 + n + 4n + 4 = n^2(n + 1) + n(n + 1) + 4(n + 1)$, откуда $n^3 + 2n^2 + 5n + 4 = (n + 1)(n^2 + n + 4)$.

Заметим, что $n + 1$ не имеет общих простых делителей с $n^2 + n + 1$, иначе, если простое число p делит каждое из них, то и их разность кратна p . То есть n^2 делится на p , тогда n делится на p и $n + 1$, что приводит к противоречию. Значит, $n^2 + n + 4$ делится на $n^2 + n + 1$, откуда $n^2 + n + 4 - (n^2 + n + 1) = 3$ тоже делится на $n^2 + n + 1$. То есть $3 \geq n^2 + n + 1$, что возможно в натуральных числах только при $n = 1$.

Задача 0-1. Назовём четырёхзначное число «гармоничным», если все его цифры делятся на 4. Найдите количество «гармоничных» чисел.

Ответ: 54.

Решение. Первая цифра не может быть 0, поэтому на первом месте могут стоять 4 или 8 (2 варианта). На остальных трёх местах — 0, 4, 8 (3 варианта каждое). Всего $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 54$ числа.

Задача 0-2. На лужайке жили 35 гусениц и куколок. После того, как 8 куколок стали бабочками и улетели, а 2 гусеницы стали куколками, гусениц стало вдвое больше, чем куколок. Сколько гусениц и сколько куколок жило на лужайке вначале?

Ответ: 20 гусениц и 15 куколок.

Решение. Пусть куколок было k , тогда гусениц $35 - k$. После изменений куколок стало $k - 8 + 2 = k - 6$, гусениц $35 - k - 2 = 33 - k$. По условию $33 - k = 2(k - 6)$, откуда $k = 15$; гусениц 20.

Задача 0-3. Расставьте в равенстве $8\ 8\ 8\ 8 = 5\ 5\ 5$ знаки арифметических действий так, чтобы равенство стало верным. (Скобки использовать нельзя.)

Решение. $8 + 8 - 8 : 8 = 5 + 5 + 5$.

Задача 0-4. Представьте число 2025 как сумму двух палиндромов, каждый из которых больше 10. Палиндромы — это натуральные числа, которые одинаково читаются справа налево и слева направо. (Например, 0, 989, 5115.)

Решение. Например, $2025 = 474 + 1551$ (возможны и другие).

Задача 0-5. У Пети есть 4 палочки. Самая короткая имеет длину 2, следующая — длину 2,5. Известно, что ни из каких трёх палочек нельзя составить треугольник. Какая наименьшая возможная сумма длин двух самых длинных палочек?

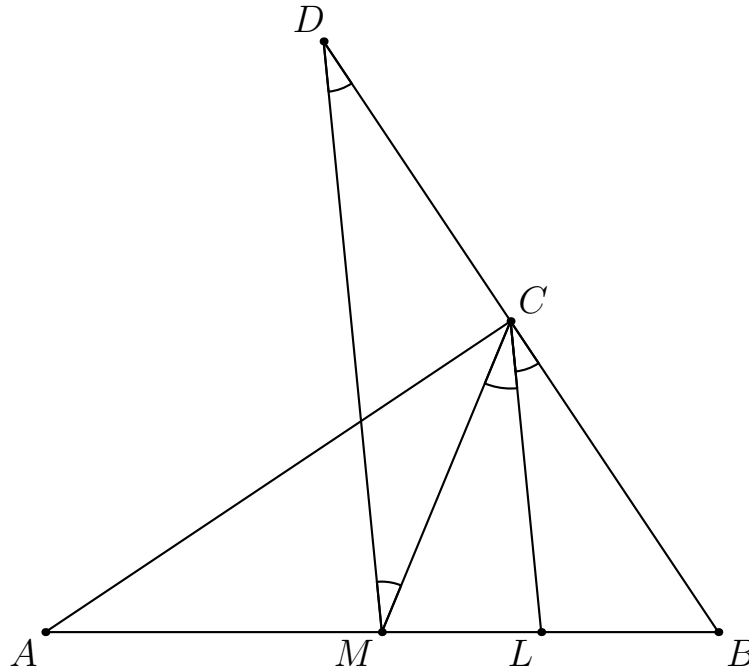
Ответ: 11,5.

Решение. Пусть длины двух самых длинных палочек равны c и d . Из неравенства треугольника следует, что $c \geq 2 + 2,5 = 4,5$, а $d \geq 2,5 + c \geq 7$. Тогда $c + d \geq 4,5 + 7 = 11,5$.

Задача 0-6. В прямоугольном треугольнике ABC к его гипотенузе AB провели медиану CM . На продолжении BC за точку C отметили точку D так, что угол CMD оказался в два раза меньше угла ABC . Найдите длину отрезка CD , если $AB = 20$.

Ответ: 10.

Решение. Медиана CM из прямого угла в прямоугольном треугольнике равна половине гипотенузы, то есть $CM = AM = BM = 10$. Треугольник $СМВ$ равнобедренный, поэтому $\angle MCB = \angle MBC$. Пусть CL — биссектриса угла MCB . Тогда $\angle BCL = \frac{1}{2}\angle BCM = \frac{1}{2}\angle CBM = \angle BDM$, значит, $CL \parallel DM$. Тогда $\angle CMD = \angle MCL = \angle CDM$, следовательно, треугольник MCD равнобедренный и $CD = CM = 10$.



Задача 1-1. Маринетт испекла макаруны (не меньше 8 штук) и поняла, что какие бы 8 макарун она бы не съела, она точно съест 4 миндальных и 2 кокосовых. Какое количество макарун она могла испечь? Миндальные кокосовыми не бывают.

Ответ: 8, 9 или 10.

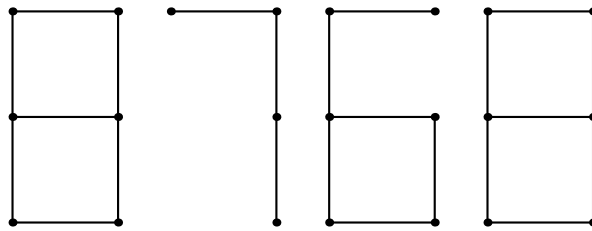
Решение. Если миндальных не меньше 7 или кокосовых не меньше 5, то можно выбрать 8 макарун, где условие не выполняется. Значит, миндальных не более 6, кокосовых не более 4, то есть всего не более 10 макарун. Каждое из чисел 8, 9, 10 достижимо.

Задача 1-2. Дана доска 5×5 , приведите пример пути шахматного коня, такой, что он побывает в каждой клетке ровно по 1 разу. Вы можете сами выбрать изначальную позицию коня.

Решение.

23	12	7	2	25
6	17	24	13	8
11	22	1	18	3
16	5	20	9	14
21	10	15	4	19

Задача 1-3. Переложите ровно три спички так, чтобы получилось наименьшее возможное четырёхзначное число.



Образец цифр:

Ответ: 1888.

Решение. Заметим, что можно переложить три спички, из которых состоит цифра 7, на следующие позиции: две на первую единицу и одной дополнить цифру 6 до 8. При любом другом перетаскивании число либо не будет четырёхзначным, либо будет начинаться не с 1, но тогда оно будет больше 1888.

Задача 1-4. Даня задумал число, затем умножил его на сумму цифр этого числа. В итоге получилось 792. Какое это могло быть число? Найдите все варианты.

Ответ: 66 или 132.

Решение. Пусть $S(n)$ — сумма цифр числа n . Решим уравнение

$$S(n) \cdot n = 792 = 8 \cdot 9 \cdot 11.$$

Как известно, сумма цифр делится на 3 тогда и только тогда, когда число делится на 3. Отсюда $S(n)$ и n кратны 3, но не кратны 9. Понятно, что $S(n) < n$, при этом $8 \cdot 11 \cdot 3 \geq n$, откуда потенциальные значения n : 264, 132, 66, 33 (если n не делится на 11, то $n < 25$, а значит, $S(n) \cdot n < 25 \cdot 25 = 625 < 792$, противоречие). Перебрав, получим, что подходят только числа 66 и 132.

Задача 1-5. Решите в натуральных числах уравнение

$$a = \underbrace{d(d(\dots(d(a))\dots))}_{\text{повторяется } a \text{ раз}},$$

где $d(a)$ — количество делителей числа a .

Ответ: 1 или 2.

Решение. Для $a > 2$ выполняется $d(a) < a$ (так как a не делится на $a - 1$). Тогда после a применений функция d даст число меньше a , противоречие. Легко видеть, что $a = 1$ и $a = 2$ подходят.

Задача 1-6. Расставьте вместо решёток цифры так, чтобы равенство стало верным:

$$(\# \cdot \# + \#)(\# \cdot \# + \#)(\# \cdot \# - \#) = 2023.$$

Решение. $(5 \cdot 2 + 7)(9 \cdot 1 + 8)(3 \cdot 4 - 5)$.

Задача 2-2. В числе 6437051928 вычеркните ровно пять цифр, чтобы оставшееся пятизначное число было максимально возможным. В ответе запишите полученное число.

Ответ: 75928.

Решение. После вычеркивания цифр число всегда будет получаться пятизначным, причём на первой позиции у него будет цифра не больше 7. Это значит, что первые три цифры обязательно должны быть вычеркнутыми. Теперь на второй позиции у числа может быть цифра, не превосходящая 5, откуда получаем, что 0 тоже должен быть зачёркнут. На третьей позиции будет цифра, не превосходящая 9, следовательно, 1 будет зачёркнута. Таким образом, полученное число является наибольшим.

Задача 2-3. За один ход можно вычёркнуть по 1 из двух соседних по стороне клеток. За сколько ходов можно получить из левой картинке правую?

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1	0	1
0	1	0
1	0	1

Ответ: 20.

Решение. Рассмотрим закрашенные клетки (см. рисунок). Сумма чисел на них изначально равна $2 + 4 + 6 + 8 = 20$, а в конце равна 0. Каждый ход уменьшает эту сумму на 1, значит, нужно 20 ходов. На это количество ходов существует пример.

Задача 2-4. Имеются четыре числа, сумма которых равна 4. Известно, что сумма любых трёх из них неотрицательна. Какое наименьшее значение может принимать наименьшее из этих чисел?

Ответ: -8 .

Решение. *Оценка.* Пусть $a \leq b \leq c \leq d$. Тогда $a + b + c \geq 0$, значит, $d = 4 - (a + b + c) \leq 4$. С другой стороны, $-a \leq b + c \leq d + d \leq 4 + 4 = 8$, следовательно, $a \geq -8$.

Пример. Числа 4, 4, 4, -8 показывают достижимость оценки.

Задача 2-5. Натуральные числа $1, 2, 3, \dots, 1000$ разбили на группы $1, 2, 3, \dots, 10; 11, 12, 13, \dots, 20; \dots; 991, 992, 993, \dots, 1000$ (по 10 чисел в каждой группе). Найдите количество групп, в которых есть ровно 2 числа, делящихся на 7.

Ответ: 42.

Решение. В каждой группе из 10 подряд идущих чисел может быть либо одно, либо два числа, кратных 7 (три не могут, так как расстояние между соседними кратными 7 равно 7; $7 \cdot 2 = 14 > 10$). Ровно два числа кратны 7 тогда и только тогда, когда первое из кратных 7 в группе стоит на одной из первых трёх позиций (иначе второе не поместится в группу).

Группа с номером k ($k = 1, \dots, 100$) состоит из чисел $10k - 9, 10k - 8, \dots, 10k$. Чтобы в ней было два числа, кратных 7, нужно, чтобы одно из чисел $10k - 9, 10k - 8, 10k - 7$ делилось на 7. Это происходит, когда номер группы k при делении на 7 даёт остаток 3, 5 или 0 (проверяется подстановкой: например, $k = 3$ даёт $10 \cdot 3 - 9 = 21$). В каждом из этих трёх случаев среди чисел от 1 до 100 находится ровно 14 таких k (поскольку $100 = 7 \cdot 14 + 2$). Следовательно, всего групп $3 \cdot 14 = 42$.

Задача 2-6. Найдите наименьшее натуральное x такое, что x^2 оканчивается на 9009.

Ответ: 1503.

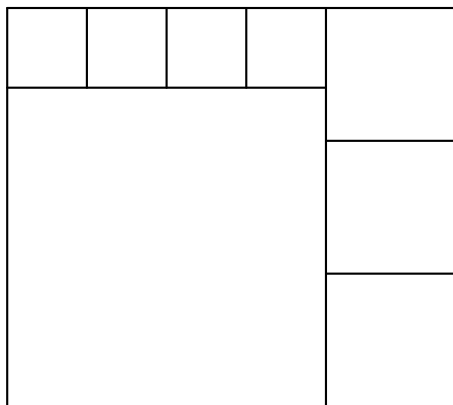
Решение. Несложно убедиться, что данное число подходит (найти это число можно допущением, что число имеет вид $100k + 3$). Докажем, что оно минимально. Пусть есть другое такое число x . Тогда их разность оканчивается на 4 нуля, следовательно, делится на 10000, то есть $(1503 - x)(1503 + x)$ делится на 10^4 , откуда одна из скобок делится на 625, так как, если обе скобки кратны 5, то и их сумма кратна 5, но 3006 не кратно 5, противоречие. Пусть $1503 - x$ делится на 625, тогда $1503 - x = 625$ или $1503 - x = 1250$. Поскольку x не может оканчиваться на 8, то $1503 - 1250 = x = 253$, что не подходит. Следовательно, $x + 1503$ делится на 625, то есть $x + 1503 = 625k$, где k натуральное, причём $625k = x + 1503 < 1503 \cdot 2 = 3006$, откуда $k \leq 4$. С другой стороны, $k \geq 3$, так как $625k > 1503$. Легко видеть, что случаи $k = 3$ и $k = 4$ не подходят.

Задача 3-3. Найдите наименьшее натуральное число, кратное и 31, и 3, начинающееся при этом с 2024.

Ответ: 202461.

Решение. Первые числа, начинающиеся с 2024 и кратные 31: 20243, 202430, 202461, но первые два из них не кратны 3, тогда наименьшее подходящее число — 202461.

Задача 3-4. Прямоугольник разрезан на восемь квадратов. Площадь среднего по размеру квадрата равна 100. Чему равна площадь исходного прямоугольника?



Ответ: 1020.

Решение. Сторона среднего квадрата 10. Пусть сторона малого квадрата a , тогда большого $4a$. Из рисунка $4a + a = 3 \cdot 10$, значит, $a = 6$, откуда площадь прямоугольника равна $(24 + 10) \cdot 30 = 1020$.

Задача 3-5. Назовём натуральное число k «резанным», если оно делится на первые $\frac{k}{72}$ ($\frac{k}{72}$ — натуральное число) простых чисел. Найдите все такие числа.

Ответ: 72 и 144.

Решение. Пусть $k = 72x$. Тогда k должно делиться на первые x простых чисел. В частности, k должно делиться на x -е простое число p_x . Но $p_x > x$ для всех $x \geq 2$ (так как среди чисел от 2 до x не может быть x простых). Следовательно, $k = 72x$ должно делиться на число p_x , большее x . Это возможно только если p_x входит в разложение 72, то есть $p_x = 2$ или $p_x = 3$. Значит, $x \leq 2$ (так как третье простое число — 5). При $x = 1$ получаем $k = 72$, при $x = 2$ — $k = 144$, оба варианта подходят.

Задача 3-6. Найдите наибольшее натуральное число, в записи которого все цифры различны и сумма любых двух из них является составным числом.

Ответ: 97531.

Решение. В этом числе не могут одновременно быть цифры 9 и 8; 7 и 6; 5 и 2; 4 и 3; 0 и 1, так как цифры в каждой паре в сумме дают не составное число. Тогда искомое число не более чем пятизначное. На первых трёх позициях обязательно находятся 9, 7, 5, иначе число не будет являться наибольшим. На четвёртом месте не может находиться цифра 4, ведь $7 + 4 = 11$ — простое. Значит, на четвёртом месте стоит цифра 3, тогда на последнем месте может стоять лишь цифра 1. В итоге получаем число 97531.

Задача 4-4. У Лёни есть 100 носков: чёрные, красные, зелёные и полосатые. Оказалось, что среди любых 85 носков обязательно есть носки всех четырёх раскрасок. Среди какого наименьшего количества носков наверняка встретятся носки хотя бы трёх раскрасок?

Ответ: 69.

Решение. Пусть x, y, z, w — количество носков каждого типа. Тогда сумма любых трёх меньше 85, иначе можно найти 85 носков, в которых нет носков какой-то раскраски. Значит, $x + y + z < 85$, и поскольку $x + y + z + w = 100$, то $x, y, z, w \geq 16$. Упорядочим числа: $x \leq y \leq z \leq w$. Так как $x + y$ — наибольшая из попарных сумм и $x + y = 100 - z - w \leq 100 - 16 - 16 = 68$, то среди 69 носков точно найдутся хотя бы три разные раскраски. Пример, когда среди 68 носков может быть ровно два типа: 34, 34, 16, 16.

Задача 4-5. Из набора натуральных чисел от 1 до n удалили ровно 5 чисел, и оказалось, что не осталось таких троек различных чисел, что произведение двух из них равно третьему. При каком наибольшем n это возможно?

Ответ: 55.

Решение. *Пример.* Удалим числа 2, 3, 4, 5, 6. Легко видеть, что единица не влияет на произведении, поэтому наименьшее возможное произведение двух различных чисел равно $7 \cdot 8 = 56 > 55$. *Оценка.* Предположим, что $n \geq 56$ и выделим следующие тройки: $(7, 8, 56)$, $(6, 9, 54)$, $(5, 10, 50)$, $(4, 11, 44)$, $(3, 12, 36)$, $(2, 11, 22)$. В каждой из них одно из чисел равняется произведению двух других, причём числа в тройках не пересекаются. Из каждой тройки нужно удалить по числу, но удаляемых чисел 5, а троек — 6, противоречие. Значит, $n \leq 55$.

Задача 4-6. Вася записал числа 1, 2, ..., 100 на пятидесяти карточках, на каждой стороне каждой карточки — по числу. Затем он выложил карточки на стол. Петя видит лишь верхние числа; он может выбрать любой набор карточек и перевернуть их. Он выиграет,

если после этого сумма чисел на верхних сторонах карточек будет не меньше k . При каком наибольшем k Петя гарантированно может выиграть?

Ответ: 2525.

Решение. Сумма всех чисел 5050. Либо верхние, либо нижние числа дают сумму не менее 2525; Петя может либо ничего не делать, либо перевернуть все карточки.

Пример, где 2525 не улучшить: разбить числа на четвёрки $(4i - 3, 4i - 2, 4i - 1, 4i)$ и положить сверху средние, снизу крайние. Если Петя перевернёт обе карточки k -й четвёрки $(4k - 3, 4k - 2, 4k - 1, 4k)$, то на смену сумме $(4k - 2) + (4k - 1)$ придёт равная ей по значению, а если перевернёт лишь одну карточку этой четвёрки, то на смену придёт самое маленькое число $4k - 3$, после чего сумма видимых чисел уменьшится и станет меньше 2525.

Задача 5-5. На окружности отмечено 200 точек. Назовём 72-дугой набор из 72 подряд отмеченных точек. Какое наибольшее количество 72-дуг могут попарно пересекаться?

Ответ: 72.

Решение. *Оценка.* Зафиксируем одну дугу. Любая другая дуга, пересекающая её, должна начинаться внутри неё и заканчиваться вне, или наоборот. Таких дуг не более 71, значит, всего дуг не более 72. *Пример.* Последовательные дуги.

Задача 5-6. Сколько решений имеет ребус

$$\text{Т} \cdot \text{Ю} \cdot \text{М} = \text{Е} \cdot \text{Н} \cdot \text{Ь}$$

(разные буквы соответствуют разным цифрам)?

Ответ: 144.

Решение. Цифра 0 не может участвовать, так как все буквы различны. Также невозможны цифры 5 и 7, поскольку они не делят ни одно другое число из допустимого набора без остатка. Остаются цифры 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9. Их произведение равно $2^7 \cdot 3^4$. Чтобы разбить их на две группы с равным произведением, нужно исключить одну цифру так, чтобы оставшиеся имели чётные показатели степеней 2 и 3. Это возможно только если исключить 2 или 8.

Рассмотрим первый случай: исключена 8. Тогда в произведении участвуют 1, 2, 3, 4, 6, 9. Чтобы равенство выполнялось, цифры 3 и 6 должны быть в одной части, 9 — в другой. Тогда в левой части должна быть цифра 2, в правой — цифры 1 и 4. Число способов: $3!$ перестановок в каждой части и 2 способа поменять части местами, итого $6 \cdot 6 \cdot 2 = 72$.

Второй случай: исключена 2. Аналогично получаем 72 способа. Значит, общее число решений равно $72 + 72 = 144$.

Задача 6-6. Про различные числа a, b, c известно, что:

$$2025(a - b)(b - c)(c - a) = (a + b)(b + c)(c + a).$$

Чему может быть равно выражение

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}?$$

Ответ: 3037/2025.

Решение. Заметим, что справедливо следующее равенство:

$$2 \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \right) + \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = 3,$$

откуда

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} = \left(3 - \frac{1}{2025}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{3037}{2025}.$$

§3.4.2 Пенальти

Задача 1. k команд проводят отборочный турнир по следующим правилам: изначально в каждой команде по 3 человека; в одном матче участвуют две команды с одинаковым числом участников; победившая команда забирает участника из проигравшей команды. Если в команде остаётся 1 или 5 человек, то она выходит из турнира. Турнир заканчивается, когда никакие две оставшиеся команды не могут сыграть по правилам. Какое число команд может не выйти из турнира?

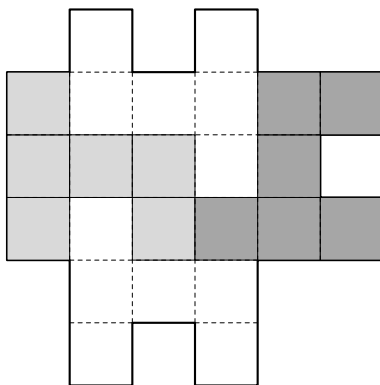
Ответ: 1, 2 или 3.

Решение. *Оценка.* Рассмотрим ситуацию, когда игра не может продолжиться. Пусть в этот момент осталось n команд. Если $n > 3$, то в каждой из них может быть от двух до четырёх человек. Значит, есть хотя бы две равные команды и они могут сыграть между собой — противоречие. Тогда $n \leq 3$.

Пример. 1) для $n = 1$ рассмотрим $k = 1$. Легко видеть, что эта команда не сможет ни с кем сыграть. 2) для $n = 2$ рассмотрим $k = 2$. Команды могут сыграть между собой лишь один раз, при этом ни одна команда не будет исключена. 3) для $n = 3$ рассмотрим $k = 3$. После одного матча в командах будет 2, 3 и 4 человека. Больше ни одной игры пройти не сможет, то есть никто не вылетит.

Задача 2. Разрежьте данную фигуру на 4 равных части:

Решение.



Задача 3. Найдите 72-ю цифру после запятой у дроби $\frac{703}{1998}$.

Ответ: 1.

Решение. Делением в столбик получим: $703/1998 = 0,35(185)$. Обратим внимание, что, начиная с третьего знака после запятой, образуется цикл длины 3. Тогда все цифры с номерами, кратными трём, в частности, и 72-я, будут равны 1.

Задача 4. Приведите пример различных целых a , b , c таких, что

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{3c} = a + 2b + 3c.$$

Ответ: $a = 1$, $b = -3$, $c = 2$.

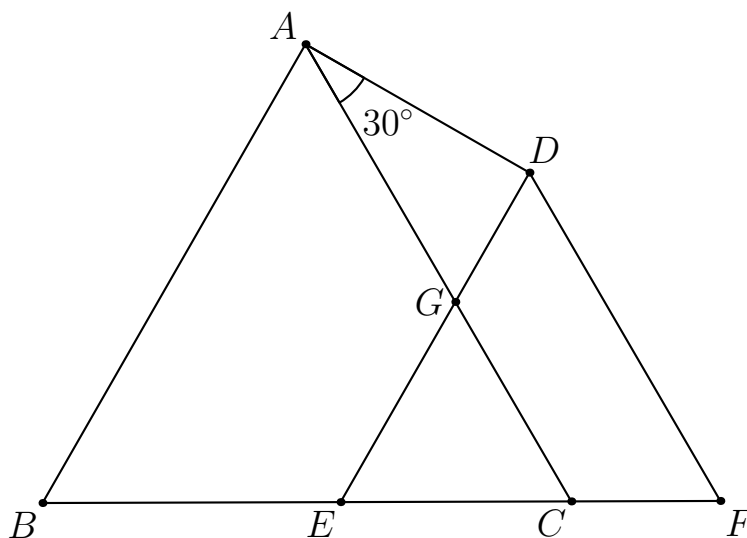
Комментарий. Подойдёт любой пример вида $(1, 3k, -2k)$, где k — целое число.

Задача 5. Назовём число «спартанским», если в нём содержится ровно одна цифра «3» и ровно две цифры «0». Найдите количество «спартанских» чисел от 1 до 10000.

Ответ: 49.

Решение. Единственное трёхзначное «спартанское» число — 300. В четырёхзначном «спартанском» числе четвёртая цифра k , отличная от 0 и 3, может принимать 8 значений. Одна из цифр 3 или k стоит на первом месте, вторая на местах 2–4, остальные цифры — нули, расставляются однозначно, то есть расставить цифры в числе можно $2 \cdot 3 \cdot 1 = 6$ способами. Так как k можно выбрать 8-ю способами, то всего четырёхзначных «спартанских» чисел $6 \cdot 8 = 48$. Значит, всего «спартанских» чисел $1 + 48 = 49$.

Задача 6. Равносторонние треугольники ABC и DEF со сторонами 4 и 3 расположены как на рисунке. Найдите длину отрезка GE .



Ответ: 2.

Решение. Заметим, что треугольник EGC равносторонний. Тогда пусть $GD = x$, $GE = GC = y$. В треугольнике ADG два угла равны 30° и 60° , значит, он прямоугольный, причём катет напротив угла в 30° равен половине гипотенузы, то есть $AG = 2DG = 2x$. Итого, имеем два уравнения: $AC = AG + GC = 2x + y = 4$, $DE = EG + GD = x + y = 3$, откуда находим: $GE = y = 2$, $x = 1$.

Задача 7. За круглый стол сели 100 школьников: мальчики и девочки. Школьник, у которого оба соседа того же пола, что и он сам, говорит правду, а иначе он лжёт. Каждый школьник произнёс следующую фразу: «Среди моих соседей ровно один говорит правду». Сколько детей солгали? Найдите все варианты.

Ответ: 100.

Решение. Предположим, что есть человек, сказавший правду. Пусть это мальчик, тогда справа и слева от него сидят мальчики. С точностью до симметрии разбора случаев, его левый сосед солжёт, это значит, что слева от него сидит девочка, которая должна говорить правду. Но она не может говорить правду, так как сидит рядом с мальчиком — противоречие. Значит, все дети солгали. Такое действительно возможно, когда мальчики и девочки за столом чередуются.

Задача 8. Мальчики и девочки ели конфеты, причём мальчиков было больше, чем девочек. Каждый съел по 5 конфет. Известно, что мальчики могли бы съесть все конфеты сами,

разделив между собой поровну. Девочки тоже могли бы. Сколько в этом случае досталось бы каждой девочке?

Ответ: 30.

Решение. Пусть мальчиков было m , девочек d . Тогда всего конфет $5(m + d)$, это число делится на m и d по условию. Откуда $5(m + d)$ кратно m и d , значит $5d$ кратно m , $5m$ кратно d . Вынесем $k = \text{НОД}(m, d)$: $m = k \cdot m'$, $d = k \cdot d'$. Тогда условия делимости можно переписать в следующем виде: $5d'$ кратно m' , $5m'$ кратно d' , значит 5 кратно m' , 5 кратно d' , но $m' > d'$, так как $m > d$. Из этого получаем, что $m' = 5$, $d' = 1$. В итоге, всего конфет каждая девочка получит

$$\frac{5(m + d)}{d} = \frac{5(m' + d')}{d'} = 5 \cdot 6 = 30.$$

Задача 9. Кирилл Сергеев из 4А класса и 19 его друзей из той же школы отправились в поход. Оказалось, что среди любых пяти из этих туристов обязательно есть одноклассники, а среди любых восьми — не больше, чем пять одноклассников. Сколько учеников 4А класса пошли в поход?

Ответ: 5.

Решение. Из первого условия следует, что в поход отправились ученики из не более чем 4-х классов. Из второго условия получаем, что учеников каждого класса не более 5, тогда суммарно их не больше 20, но при этом их в точности 20. Это означает, что учеников каждого класса ровно 5, в том числе и учеников 4А.

Задача 10. Сколько значений может принимать выражение

$$T + Y + P + H + I + P + T + Y + M + E + H + B?$$

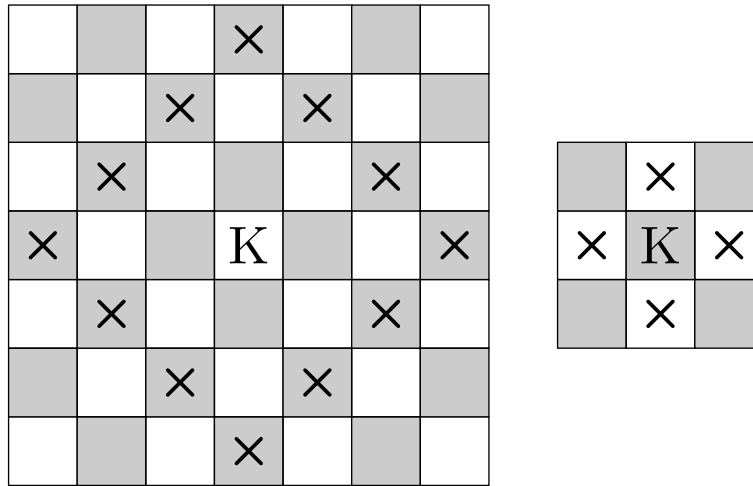
Ответ: 17.

Решение. Заметим, что в данной сумме ровно 10 различных букв, причём T и P повторяются дважды. Перепишем сумму в виде

$$T + P + (Y + P + H + I + T + Y + M + E + H + B).$$

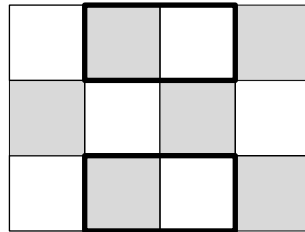
Выражение в скобках содержит ровно 10 различных букв, значит, эта сумма всегда будет равна $0 + 1 + 2 + \dots + 9 = 45$. Итого, искомая сумма равна $T + P + 45$. Ясно, что сумма $T + P$ принимает значения от 1 ($0 + 1$) до 17 ($8 + 9$) (любое промежуточное значение достигается) в силу того, что T и P — различные цифры. Значит, и искомая сумма принимает 17 различных значений.

Задача 11. Женя придумала шахматную фигуру «капибара». «Капибары» бывают большие и маленькие. Большая «капибара» бьёт на расстоянии трёх клеток, а маленькая бьёт лишь соседние клетки (см. рис). При каком наибольшем N на шахматной доске можно расставить N больших и N маленьких «капибар»?



Ответ: 16.

Решение. *Пример.* Поставим всех капибар на чёрные клетки, тем самым они не будут бить друг друга. *Оценка.* Обратим внимание, что в четырёх отмеченных клетках справа располагается не более двух капибар. Разобьём доску на 16 таких групп, тогда суммарно капибар не больше $16 \cdot 2 = 32$. С другой стороны, их ровно $2N$, откуда $N \leq 16$.



Задача 12. Девятизначное число $\overline{ABCABCBBB}$ делится на все числа от 1 до 17. Чему равны цифры A , B и C ?

Ответ: $A = 3$, $B = 0$, $C = 6$.

Решение. Так как число делится на 2 и на 5, последняя цифра $B = 0$. Тогда число имеет вид $\overline{A0CA0C000}$. Оно делится на 9, значит, сумма цифр $2A + 2C$ кратна 9, откуда $A + C$ кратно 9. Запишем число как $\overline{A0CA0C000} = \overline{A0C} \cdot 1001000 = \overline{A0C} \cdot 1001 \cdot 1000$. Число 1001 делится на 7, 11, 13, а 1000 — на 8 и 125. Чтобы число делилось на 16 (то есть на 2^4), нужно, чтобы $\overline{A0C}$ было чётным (добавляет ещё одну двойку). Чтобы число делилось на 17, нужно, чтобы $\overline{A0C}$ делилось на 17 (так как 1001 и 1000 не делятся на 17). Также $\overline{A0C}$ делится на 9 (из условия $A + C$ кратно 9). Значит, $\overline{A0C}$ кратно $\text{НОК}(2, 9, 17) = 306$. Трёхзначные числа вида $\overline{A0C}$, кратные 306: это 306 (и 612, 918, но они не имеют вид $\overline{A0C}$, так как вторая цифра не 0). Следовательно, $\overline{A0C} = 306$, значит, $A = 3$, $C = 6$.

Задача 13. Илья выписал первые 10 цифр числа π : 3141592653. Помогите ему зачеркнуть несколько цифр так, чтобы у него получилось наибольшее число, кратное 11. В ответ запишите полученное число.

Ответ: 314159263 — наибольшее число, получаемое вычёркиванием лишь одной цифры.

Задача 14. Пусть $L(N)$ — количество букв в числе N . (Например, $L(17) = 10$.) Найдите $\underbrace{L(L(\dots L(2025) \dots))}_{2025 \text{ раз}}$.

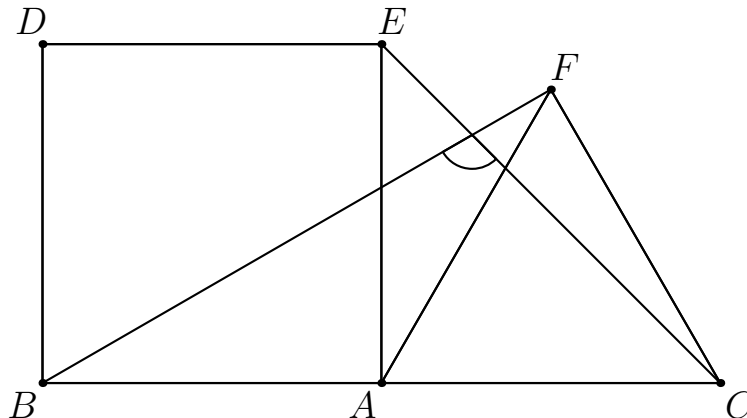
Ответ: 5.

Решение. $L(2025) = 21$, $L(21) = 12$, $L(12) = 10$, $L(10) = 6$, $L(6) = 5$, $L(5) = 4$, $L(4) = 6$.
Итого, через 4 операции образуется цикл длины 3:

$$6 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 6.$$

Обратим внимание, что после операции, номер которой делится на 3 (начиная с 6-й), будет получаться число 5. Число 2025 кратно 3, значит, в итоге останется число 5.

Задача 15. На прямой отмечены точки A , B , C таким образом, что $AB = AC$. В одну полуплоскость от прямой построены квадрат $ABDE$ и правильный треугольник AFC . Найдите угол между прямыми BF и CE .



Ответ: 75° .

Решение. $AE = AC$, тогда треугольник AEC равнобедренный, значит, $\angle ECA = 45^\circ$, $\angle ECF = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$. $BA = AC = AF$ — медиана в треугольнике BFC и она равна половине стороны, к которой проведена, следовательно, этот треугольник прямоугольный, $\angle BFC = 90^\circ$. Искомый угол равен $180^\circ - 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$.

Задача 16. Пусть a , b , c — натуральные числа, для которых

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}} = 3,14.$$

Найдите $a + b + c$.

Ответ: 17.

Решение. Так как $b \geq 1$ и $c \geq 1$, то

$$0 < \frac{1}{b + \frac{1}{c}} < 1.$$

Число 3,14 можно представить как $3 + 0,14$. Поскольку a — натуральное, а дробная часть меньше 1, то $a = 3$ и

$$\frac{1}{b + \frac{1}{c}} = 0,14 = \frac{7}{50}.$$

Тогда

$$b + \frac{1}{c} = \frac{50}{7}.$$

Так как b — натуральное и $1/c \leq 1$, то $b = 7$ (ближайшее целое, не превосходящее $50/7 \approx 7,14$). Значит,

$$\frac{1}{c} = \frac{50}{7} - 7 = \frac{1}{7},$$

откуда $c = 7$. Следовательно, $a + b + c = 3 + 7 + 7 = 17$.

4 x

§4.1 4 класс

§4.1.1 Домино

Задача 0-0. Придумайте хотя бы одно решение ребуса

$$\text{КИЙ} + \text{ШАР} = \text{ЛУЗА},$$

где каждой букве соответствует своя цифра, разным буквам — разные цифры.

Решение. $K = 6, I = 4, Y = 2, Ш = 8, A = 9, P = 7, Л = 1, У = 5, З = 3$:

$$642 + 897 = 1539.$$

Задача 0-1. Запишите 7 подряд идущих чётных чисел так, чтобы наименьшее было в 3 раза меньше наибольшего.

Ответ: 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18.

Решение. Пусть наименьшее чётное число равно x , тогда семь подряд идущих чётных:

$$x, x + 2, x + 4, x + 6, x + 8, x + 10, x + 12.$$

Наибольшее $x + 12$, откуда из условия

$$x + 12 = 3x \implies 12 = 2x \implies x = 6.$$

Получаем следующий ряд: 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18.

Задача 0-2. Натуральное число называется палиндромом, если при выписывании его цифр в обратном порядке оно останется таким же (например, числа 22, 404, 7887 — палиндромы, а 245, 670, 2025 — нет). Представьте число 2026 в виде суммы 3 палиндромов.

Решение. $2026 = 2002 + 22 + 2$.

Задача 0-3. Пиджак вышел из школы на 10 минут позже Носка, но шёл в 2 раза быстрее. Через какое время он его догонит?

Ответ: 10 минут.

Решение. Пусть Носок ходит со скоростью v м/мин, тогда скорость Пиджака есть $2v$ м/мин. Следовательно, в момент, когда они встретятся, Носок потратит t минут, а Пиджак $(t - 10)$ минут на одно и то же расстояние. Значит,

$$S = 2v(t - 10) = vt \implies 2(t - 10) = t \implies t = 20,$$

то есть Носок встретится с Пиджаком через 20 минут после своего выхода, откуда Пиджак догонит Носка через 10 минут.

Задача 0-4. На одном острове существует система обмена: 13 медных монет можно обменять на 7 серебряных, и 3 серебряных можно менять на 1 золотую. У мистера Крабса было 156 медных монет, а после обмена остались только золотые монеты. Сколько золотых монет у него стало?

Ответ: 28 золотых.

Решение. Разменяем все медные на серебряные. Тогда выйдет $156/13 \cdot 7 = 84$ серебряных. Разменяем теперь все серебряные на золотые. Получим $84/3 = 28$ золотых.

Задача 0-5. В детском саду 28 детей. 15 любят смотреть Лунтика, а 12 — Фиксиков, и 5 человек любят и то, и другое. Сколько детей из этого сада не любят ни один из мультиков?

Ответ: 6.

Решение. Всего в классе 28 детей. Лунтика любят 15, Фиксиков — 12. Из них 5 любят и то, и то. Если мы сложим 15 и 12, то получим 27, но эти 5 человек посчитаны дважды, поэтому вычитаем их один раз, откуда $27 - 5 = 22$ человека любят хотя бы один мультфильм. Значит, остальные $28 - 22 = 6$ детей не любят ни то, ни другое.

Задача 0-6. В новогоднем мешке Деда Мороза лежат 30 приставок PS5 и одинаковых наборов Лего. Среди любых 12 подарков имеется хотя бы одна приставка, а среди любых 20 подарков имеется хотя бы один набор Лего. Сколько приставок и сколько наборов Лего в мешке?

Ответ: 19 приставок PS5 и 11 наборов Лего.

Решение. Наборов Лего не больше 11 по первому условию. Если бы их было хотя бы 12, то среди этих 12 подарков не было бы ни одной приставки, противоречие. Аналогично, из второго условия понятно, что приставок не больше 19. Тогда всего подарков в мешке не больше 30, то есть 30 их будет, только если наборов Лего 11, а приставок PS5 — 19.

Задача 1-1. Табло электронных часов показывает 17:13. Какое время будут показывать электронные часы в следующий раз, когда сумма часов и минут будет такой же?

Ответ: 18:12.

Решение. Сумма часов и минут: $17 + 13 = 30$. Нужно найти следующее время после 17:13, у которого сумма часов и минут также равна 30. Для 17 часов подходит только 17:13, но это текущее время. Для 18 часов сумма минут должна быть $30 - 18 = 12$, что даёт время 18:12. Следовательно, ближайшее следующее время — 18:12.

Задача 1-2. Сколько существует способов выбрать пару из мальчика и девочки в классе, где всего 5 мальчиков и 5 девочек?

Ответ: 25.

Решение. Каждый мальчик может встать в пару с любой из пяти девочек, тогда каждый из них может создать ровно 5 пар с девочками. Тогда пар мальчик-девочка всего $5 \cdot 5 = 25$.

Задача 1-3. Баба Клава по осени очень любит считать урожай. При этом она заметила, что мешок моркови и 2 куля гороха весят, как 9 мешков картошки, а мешок моркови и 6 кулей гороха весят, как 15 мешков картошки. Сколько весят вместе 2 куля гороха и 2 мешка картошки, если мешок картошки весит 10 килограммов?

Ответ: 50 кг.

Решение. Обозначим: M — вес мешка моркови, Γ — вес куля гороха, K — вес мешка картошки. Из условия: $M + 2\Gamma = 9K$, $M + 6\Gamma = 15K$. Вычтем первое из второго:

$$(M + 6\Gamma) - (M + 2\Gamma) = 15K - 9K \implies 4\Gamma = 6K \implies \Gamma = 1,5K.$$

Подставим в первое:

$$M + 2 \cdot 1,5K = 9K \implies M + 3K = 9K \implies M = 6K.$$

Теперь нужно найти вес $2\Gamma + 2K$:

$$\begin{aligned} 2\Gamma &= 2 \cdot 1,5K = 3K \implies 2\Gamma + 2K = 3K + 2K = 5K, \\ K &= 10 \text{ кг} \implies 5K = 50 \text{ кг}. \end{aligned}$$

Задача 1-4. Гена с Чебурашкой нашли ящик, в котором было 25 апельсинов, и решили делить их таким образом: за каждые 10 см роста можно взять один апельсин. Оказалось, что они забрали все апельсины из ящика, и Гене досталось на 15 апельсинов больше. Потом пришла старушка Шапокляк, забрала у Гены половину его апельсинов и теперь у него в два раза больше апельсинов, чем у Чебурашки. Определите рост Гены и рост Чебурашки.

Ответ: рост Гены составляет 200 см, а Чебурашки — 50 см.

Решение. Пусть рост Гены x см, Чебурашки — y см. За каждые 10 см дают 1 апельсин, поэтому Гена взял $x/10$ апельсинов, а Чебурашка — $y/10$. Всего 25, а значит,

$$\frac{x}{10} + \frac{y}{10} = 25 \implies x + y = 250.$$

У Гены на 15 больше, поэтому

$$\frac{x}{10} - \frac{y}{10} = 15 \implies x - y = 150.$$

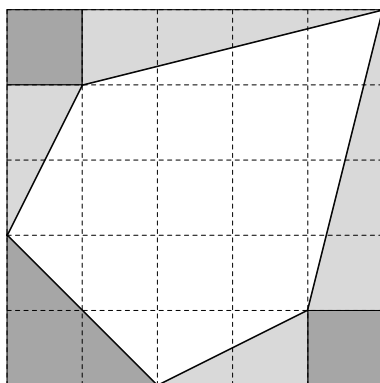
Сложив полученные равенства, получим

$$2x = 400 \implies x = 200, y = 50.$$

Задача 1-5. Найдите площадь фигуры, изображённой на рисунке. Длина стороны клетки — 1 см.

Ответ: 15 см^2 .

Решение. Дополним данную фигуру до квадрата 5×5 (впишем её в него). Его площадь равна 25 см^2 . Заметим, что «лишние» части составляют: два квадрата 1×1 , две половины прямоугольника 1×4 , две половины прямоугольника 1×2 и одна половина прямоугольника 2×2 . Площадь этих частей равна $2 + 4 + 2 + 2 = 10 \text{ см}^2$, следовательно, площадь исходной фигуры равна $25 - 10 = 15 \text{ см}^2$.



Задача 1-6. Найдите наибольшее четырёхзначное число, все цифры которого различны, а ещё произведение двух его цифр по краям ровно в 2 раза больше произведения двух цифр в середине.

Ответ: 9634.

Решение. Ищем наибольшее четырёхзначное число $\overline{ABCD}$, в котором все цифры различны, $A \neq 0$, и выполняется условие $A \cdot D = 2 \cdot B \cdot C$. Число максимально, значит, рассмотрим $A = 9$. Тогда $9D = 2BC$, откуда $BC = 4,5D$, следовательно, D чётное. Переберём случаи:

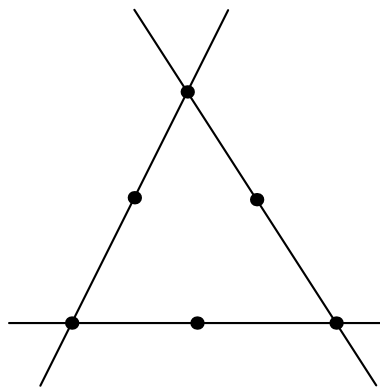
- $D = 8$: $BC = 36$, получаем пары (6, 6) или (4, 9), в первой паре повторяются цифры, а во второй 9 уже занято, не подходит.

- $D = 6$: $BC = 27$, пара $(3, 9)$, но 9 занято, не подходит.
- $D = 4$: $BC = 18$, пары $(2, 9)$ или $(3, 6)$, в первой паре 9 занято, во второй все цифры 9, 4, 6, 3 различны, значит, число 9634 подходит (взяли наибольшее с таким набором цифр).
- $D = 2$: $BC = 9$, пары $(1, 9)$ или $(3, 3)$, в первой паре 9 занято, во второй повторяются цифры, не подходит.
- $D = 0$: $BC = 0$, значит, $B = 0$ или $C = 0$, но 0 повторяется с D , не подходит.

Если $A < 9$, то число меньше 9000, а $9634 > 9000$ уже найдено, следовательно, это наибольшее возможное число.

Задача 2-2. Начертите, пожалуйста, 3 прямые и поставьте на них 6 точек так, чтобы на каждой прямой лежало ровно 3 точки.

Решение.



Задача 2-3. В Зачарованный Лес привезли весы, и все побежали взвешиваться. Оказалось, что Винни-Пух и Кристофер Робин вместе тяжелее, чем Пятачок и ослик Иа-Иа вместе. А Иа-Иа тяжелее, чем Винни-Пух и Крошка Ру вместе. Кто тяжелее: Пятачок и Крошка Ру вместе или Кристофер Робин?

Ответ: Кристофер Робин.

Решение. Обозначим: Винни Пух = П, Кристофер Робин = Р, Пятачок = Пя, Иа-Иа = И, Крошка Ру = К. Условия:

$$(1) \text{ П} + \text{Р} > \text{Пя} + \text{И}, \quad (2) \text{ И} > \text{П} + \text{К}.$$

Из (2) следует: $\text{И} - \text{К} > \text{П}$. Из (1) выразим Р: $\text{Р} > \text{Пя} + \text{И} - \text{П}$. Так как $\text{И} - \text{П} > \text{К}$ (из (2): $\text{И} > \text{П} + \text{К} \implies \text{И} - \text{П} > \text{К}$), то $\text{Р} > \text{Пя} + \text{К}$. Значит, Робин тяжелее, чем Пятачок и Крошка Ру вместе.

Задача 2-4. Добрая фея дружит с 48 помощниками, которые должны помочь Авроре и починить 4 иголки у 60 веретён (если они этого не сделают, то Аврора уколется ими и навечно заснёт). У одного веретена нельзя одновременно чинить больше 1 иголки. Через какое наименьшее время Аврору можно будет подпустить к веретёнам, если один помощник чинит одну иголку за 5 минут?

Ответ: 25 минут.

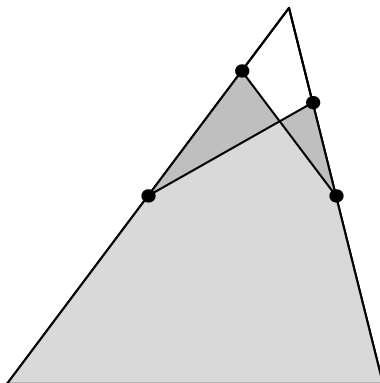
Решение. Всего иголок: $60 \cdot 4 = 240$. Общая работа в человеко-минутах: $240 \cdot 5 = 1200$. Без ограничений 48 помощников за время T выполняют работу $48T$, и необходимо $48T \geq 1200$,

откуда $T \geq 25$ минут. Ограничение на одновременную работу на одном веретене даёт условие: каждое веретено требует $4 \cdot 5 = 20$ минут последовательной работы, поэтому $T \geq 20$ минут. Более сильное ограничение — $T \geq 25$ минут.

Покажем, что 25 минут достаточно. Разобьём 25 минут на 5 интервалов по 5 минут. В каждом интервале каждый помощник чинит одну иголку; всего за 5 интервалов 48 помощников выполнят $48 \cdot 5 = 240$ операций — ровно столько, сколько нужно. Распределим операции так, чтобы каждое веретено получило 4 операции в разные интервалы (чтобы в один интервал на одном веретене работало не более одного помощника). Это возможно, например, при помощи циклического назначения: пронумеруем помощников и веретена; в первый интервал помощники 1–48 чинят веретена 1–48; во второй интервал помощник 1 чинит веретено 49, помощник 2 — веретено 50, ..., помощник 12 — веретено 60, а помощники 13–48 чинят веретена 1–36, и так далее, циклически сдвигая назначения в каждом интервале. Таким образом, за 25 минут все иголки будут починены.

Задача 2-5. Проведите два отрезка с концами на сторонах треугольника так, чтобы треугольник оказался разбит на два треугольника, один четырёхугольник и один пятиугольник.

Решение.



Задача 2-6. На уроке у Корнея Корнеевича на доске нарисовали квадрат 5×5 . В каждом маленьком квадратице 1×1 Лунтик написал число. Кузя, не смотря на доску, захотел узнать, чему равняется сумма чисел в угловых клетках квадрата, зная, что сумма чисел в каждом уголке равна 12. Чему равняется эта сумма?

Ответ: 16.

Решение. Рассмотрим любой квадрат 2×2 из клеток. В нём есть 4 уголка по 3 клетки (каждый уголок — это квадрат 2×2 без одной клетки). Сумма в каждом таком уголке равна 12. Возьмём квадрат 2×2 с числами в клетках a, b, c, d (a — верхняя левая, b — верхняя правая, c — нижняя левая, d — нижняя правая). Уголки: $a + b + c = 12$, $a + b + d = 12$, $a + c + d = 12$, $b + c + d = 12$. Вычтем первое из второго: $d - c = 0 \implies d = c$. Вычтем первое из третьего: $d - b = 0 \implies d = b$. Вычтем первое из четвёртого: $d - a = 0 \implies d = a$. Значит, $a = b = c = d$, и из $a + b + c = 12$ получаем $3a = 12$, то есть $a = 4$. Итак, в любом квадрате 2×2 все четыре числа равны 4. Поскольку весь квадрат 5×5 покрывается такими квадратами 2×2 (с перекрытием), все числа в клетках равны 4. Тогда сумма четырёх угловых клеток равна $4 + 4 + 4 + 4 = 16$.

Задача 3-3. На данный момент возраст Гринча в 4 раза больше возраста Санты в тот момент, когда он был в 2 раза младше Гринча. Какой возраст у Гринча сейчас, если через 1500 лет их суммарный возраст будет составлять 10000 лет?

Ответ: 4000 лет.

Решение. Пусть сейчас Гринчу G лет, Санте S лет, и t лет назад Санта был вдвое младше Гринча. Тогда

$$S - t = 0,5(G - t) \implies 2S - G = t.$$

Сейчас возраст Гринча в 4 раза больше возраста Санты в тот момент:

$$G = 4(S - t) = 4(S - (2S - G)) = 4(G - S) \implies G = \frac{4S}{3}.$$

Через 1500 лет сумма возрастов будет равна 10000:

$$(G + 1500) + (S + 1500) = 10000 \implies G + S = 7000.$$

Подставляем $G = \frac{4S}{3}$:

$$\frac{4S}{3} + S = 7000 \implies \frac{7S}{3} = 7000 \implies S = 3000,$$

откуда $G = 4000$.

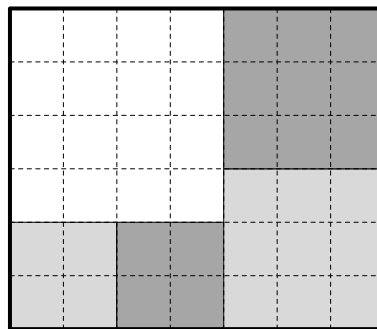
Задача 3-4. Гном разложил свои сокровища в 3 сундука разного цвета, стоящие у стены: в один — драгоценные камни, в другой — золотые монеты, в третий — магические книги. Он помнит, что красный сундук находится правее, чем камни, и что книги — правее красного сундука. В каком сундуке лежат книги, если зелёный сундук стоит левее синего?

Ответ: в синем.

Решение. Из условий «красный правее камней» и «книги правее красного» следует порядок: камни, красный, книги. Всего три сундука, значит, 1-й — камни, 2-й — красный, 3-й — книги. Раз 2-й красный, то для 1 и 3 остаются зелёный и синий цвета. Из условия «зелёный левее синего» следует, что 1-й — зелёный, а 3-й — синий, поэтому книги в синем сундуке.

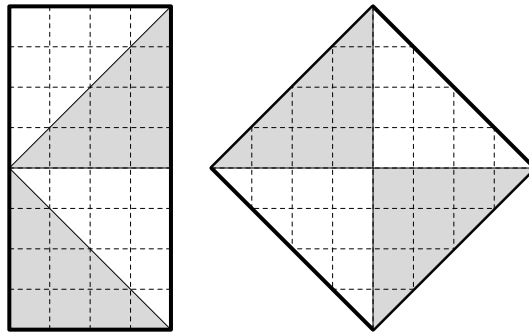
Задача 3-5. На листе в клетку нарисован прямоугольник 6×7 . Разрежьте его по линиям сетки на 5 каких-нибудь квадратов.

Решение.



Задача 3-6. Разрежьте прямоугольный лист бумаги размером $8 \text{ см} \times 4 \text{ см}$ на 4 равных части, из которых можно составить квадрат.

Решение.



Задача 4-4. Назовём число «крутым», если оно состоит из 6 знаков, и сумма его цифр делится на 7. Могут ли сразу два подряд идущих числа быть «крутыми»?

Ответ: Да, могут.

Решение. Например, 159999 и 160000:

$$1 + 5 + 9 + 9 + 9 + 9 = 42, \quad 1 + 6 + 0 + 0 + 0 + 0 = 7,$$

42 и 7 нацело делятся на 7.

Задача 4-5. Некоторое число обладает таким свойством, что все его соседние цифры образуют двузначное число, нацело делящееся на 23. Какое наибольшее число цифр оно может иметь?

Ответ: 5.

Решение. Двузначные числа, кратные 23, — это 23, 46, 69, 92. Следовательно, переходы между соседними цифрами возможны только по схеме:

$$4 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow 2 \rightarrow 3.$$

Действительно, из каждой цифры есть не более одного возможного продолжения, а в 3 продолжения нет. Чтобы цепочка была максимальной, нужно начинать с цифры, из которой можно дойти до 3, и не иметь входящих переходов. Единственная такая цифра — 4 (в неё ничто не ведёт). Таким образом, максимальная цепочка имеет вид 4, 6, 9, 2, 3 и содержит 5 цифр. Увеличить длину нельзя, так как перед 4 нечего поставить.

Легко видеть, что 46923 является примером.

Задача 4-6. Каждое ребро куба окрашено в синий или красный цвет. Из каждой вершины выходит максимум одно ребро синего цвета. Какое наибольшее число синих рёбер может быть в таком кубе?

Ответ: 4.

Решение. У куба 8 вершин. Из каждой вершины выходит не более одного синего ребра. Каждое синее ребро «занимает» по одному выходу в каждой из двух своих вершин. Значит, общее число занятых выходов равно $2S$, где S — число синих рёбер. Так как занятых выходов не больше 8, имеем $2S \leq 8$, откуда $S \leq 4$.

Пример на 4 синих ребра: возьмём 4 вертикальных ребра куба. Они попарно не имеют общих вершин, значит, из каждой вершины выходит ровно одно синее ребро.

Задача 5-5. Есть шоколадка 12×12 , играют 10 игроков, ходят по очереди, начинает 1. Каждым ходом можно взять кусок шоколадки и разломить его на 2 прямоугольные части, состоящие из квадратиков 1×1 . Выигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет?

Ответ: выиграет третий игрок.

Решение. Изначально кусок один, в конце каждый из 144 квадратиков становится отдельным куском. Каждый ход увеличивает число кусков на 1, значит, всего будет $144 - 1 = 143$ хода. Так как $143 = 10 \cdot 14 + 3$ и игроки ходят по очереди, то они полностью пройдут 14 полных кругов (140 ходов), затем первый сделает 141-й ход, второй — 142-й, третий — 143-й.

Последний ход делает третий игрок, после него ходить некому, значит, четвёртый игрок не может сделать ход и проигрывает. Следовательно, выигрывает третий игрок.

Задача 5-6. Буратино решил перейти улицу максимально медленно, по правилам дорожного движения: он обязан двигаться с постоянной скоростью, вступить на пешеходный переход шириной 20 метров, находящийся в 50 метрах от его начальной позиции, в интервале работы зелёного сигнала, и успеть полностью завершить переход до того, как этот же зелёный свет погаснет. В момент начала движения Буратино светофор для пешеходов как раз переключился на красный цвет, который горит 20 секунд, после чего на 40 секунд включается зелёный. Вычислите наименьшую скорость, с которой он сможет так сделать.

Ответ: $7/12$ м/с.

Решение. Первый зелёный свет горит с 20 по 60 секунду. Чтобы зайти на переход не раньше 20 секунды, скорость должна быть не больше $50/20 = 5/2$ м/с. Чтобы успеть покинуть переход до 60 секунды, скорость должна быть не меньше $70/60 = 7/6$ м/с.

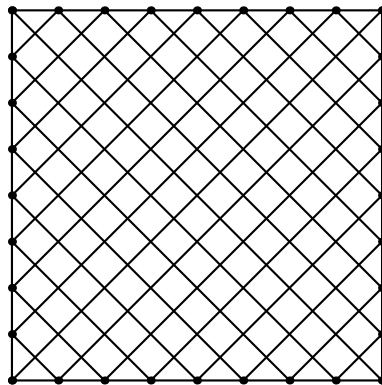
Если идти медленнее, придётся ждать следующий зелёный свет (с 80 по 120 секунду). Тогда для входа на переход не раньше 80 секунды скорость должна быть не больше $50/80 = 5/8$ м/с, а для выхода до 120 секунды — не меньше $70/120 = 7/12$ м/с. Так как $7/12 < 5/8$, такая скорость возможна и меньше предыдущей.

В третий зелёный свет (с 140 по 180 секунду) нужно, чтобы скорость была не больше $50/140 = 5/14$ м/с и одновременно не меньше $70/180 = 7/18$ м/с, но $7/18 > 5/14$ — невозможно. В дальнейшем время на преодоление дороги только растёт, значит, минимальная скорость равна $7/12$ м/с.

Задача 6-6. Каждую сторону квадрата разделили на 8 равных частей и через каждую точку деления провели ровно две прямые (через вершины по одной), которые параллельны диагоналям квадрата. На какое число частей все проведённые прямые разбили квадрат? В примере изображён квадрат, каждую сторону которого поделили на 4 равные части.

Ответ: 144.

Решение. Нетрудно понять, что каждая из прямых, параллельных диагонали квадрата, проходит ровно через 2 отмеченные точки. Тогда образуется такая «решётка»:

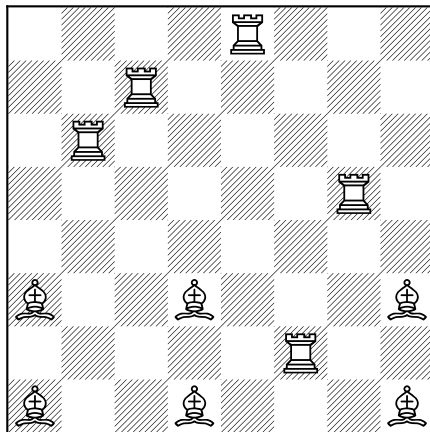


Посчитав количество частей, поймём, что их ровно 144.

§4.1.2 Пенальти

Задача 1. Расставьте на шахматной доске 5 ладей и 6 слонов так, чтобы никакая фигура не била другую. (Напомним, что ладья ходит по горизонталям и вертикалям на любое расстояние, а слон — только по диагоналям на любое количество свободных полей.) Цвет фигур не важен, любая фигура может бить любую.

Решение.

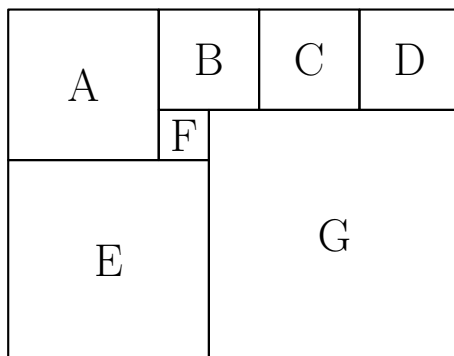


Задача 2. На острове живут рыцари (всегда говорят правду) и лжецы (всегда лгут). Однажды собралась компания из 41 островитянина, среди которых есть хотя бы один рыцарь и хотя бы один лжец. У каждого спросили, сколько всего лжецов в этой компании. Трое ответили: «Трое», семеро сказали: «Меньше семи», десять сказали: «Меньше десяти», а двадцать один сказал: «Меньше двадцати одного». Сколько лжецов может быть в компании? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 20.

Решение. Пусть L — количество лжецов. Если $L < 3$, то 3 человека, сказавших «Трое», — лжецы, противоречие. Если $L = 3$, то все сказали правду — противоречие. Если $3 < L < 7$, то лжецов 3 — противоречие. Если $7 \leq L < 10$, то лжецов 10 — противоречие. Если $10 \leq L < 20$, то лжецов 20 — противоречие. Если $L = 20$, то все условия выполняются. Если $L > 20$, то все жители лжецы, что противоречит условиям. Значит, лжецов могло быть только 20.

Задача 3. Прямоугольник разрезан на семь квадратов, как изображено на рисунке. Среди них есть квадрат, обозначенный буквой D , и известно, что длина его стороны равна 16. Найдите длины сторон двух других квадратов, которые на рисунке обозначены буквами E и G .



Ответ: сторона квадрата $E = 32$, сторона квадрата $G = 40$.

Решение. Пусть сторона квадрата F равна x . Тогда сторона квадрата A равна $x + 16$ (так как A состоит из B и F , а $B = 16$). Сторона квадрата E равна $(x + 16) + x = 2x + 16$ (сумма сторон A и F). Сторона квадрата G равна $(2x + 16) + x = 3x + 16$ (сумма сторон E и F). По условию, сумма сторон G и F в три раза больше стороны D , а $D = 16$. Получаем уравнение: $(3x + 16) + x = 3 \cdot 16$. Упрощаем: $4x + 16 = 48$, $4x = 32$, $x = 8$. Тогда сторона $E = 2 \cdot 8 + 16 = 32$, сторона $G = 3 \cdot 8 + 16 = 40$.

Задача 4. Два рыбака съедают четырёх вармоусов за пять дней. Сколько вармоусов потребуется, чтобы кормить четырёх таких рыбаков в течение месяца (30 дней)?

Ответ: 48.

Решение. Два рыбака съедают 4 вармоусов за 5 дней, значит, за 30 дней они съедят $4 \cdot \frac{30}{5} = 24$ вармоуса. Так как всего 4 рыбака, то они съедят в 2 раза больше, то есть 48 вармоусов.

Задача 5. Незнайка, Знайка и Пончик играли в футбол. Один из них разбил мячом стекло. Когда их спросили, кто это сделал, Незнайка сказал: «Пончик», Пончик сказал: «Знайка», а Знайка ответил: «Не я». Кто разбил стекло, если ровно двое из них сказали правду?

Ответ: Пончик.

Решение. Рассмотрим варианты.

Если разбил Незнайка: Незнайка сказал "Пончик" — ложь, Пончик сказал "Знайка" — ложь, Знайка сказал "Не я" — правда (1 правда).

Если разбил Знайка: Незнайка — ложь, Пончик — правда, Знайка — ложь (1 правда).

Если разбил Пончик: Незнайка — правда, Пончик — ложь, Знайка — правда (2 правды).

Условие "ровно двое сказали правду" выполняется только если разбил Пончик.

Задача 6. В классе 16 учеников. Учитель выстроил их в ряд, зная, что затем любые 11 могут уйти. Он хочет, чтобы оставшиеся 5 не стояли по росту ни в порядке возрастания, ни в порядке убывания. Сможет ли он этого добиться?

Ответ: Да.

Решение. Нумеруем учеников по росту от 1 (самый низкий) до 16 (самый высокий). Расставляем в порядке: 4, 3, 2, 1, 8, 7, 6, 5, 12, 11, 10, 9, 16, 15, 14, 13.

Пусть существуют 5 человек, у которых рост слева направо либо строго возрастает, либо строго убывает. Разделим последовательность на 4 блока по 4 подряд идущих числа. Тогда, если такие 5 людей существуют, то какие-то 2 должны находиться в одном блоке, но так как в блоке числа идут по убыванию, то эта последовательность будет убывающей. Но заметим, что в блоке все числа больше чисел, левее этого блока. Но так как такие 5 людей существуют, то 2 из них находятся в разных блоках, но у человека правее тогда рост будет выше, то есть эти 5 человек расположены по возрастанию роста, но до этого мы доказали, что они должны быть расположены по убыванию роста — противоречие.

Задача 7. Маша и Медведь едят печенье и пьют чай. Маша выпивает одну кружку чая за целое число секунд, а Медведь — за время, в три раза большее. Маша съедает 5 печений в минуту, а Медведь — 6 печений. Никто из них не может есть и пить одновременно. В некоторый момент оказалось, что они выпили одинаковое количество кружек чая (больше одной) и съели по 7 печений. Сколько кружек чая выпила Маша?

Ответ: 7.

Решение. Пусть Маша выпивает кружку чая за k секунд, а Медведь — за $3k$ секунд. Скорость поедания печенья: Маша съедает печенье за $\frac{60}{5} = 12$ секунд, а Медведь — за

$\frac{60}{6} = 10$ секунд. На 7 печений Маша тратит 84 секунды, Медведь — 70 секунд. Пусть они выпили n кружек ($n > 1$). Время Маши: $nk + 84$, Медведя: $3nk + 70$. В момент, когда у обеих n кружек и 7 печений, времена равны: $nk + 84 = 3nk + 70 \Rightarrow 2nk = 14 \Rightarrow nk = 7$. $n > 1$ целое, k целое $\Rightarrow n = 7, k = 1$.

Задача 8. В записи 88888888 между некоторыми цифрами поставьте знаки сложения так, чтобы значение полученного выражения равнялось 1000.

Ответ: $888 + 88 + 8 + 8 + 8 = 1000$.

Задача 9. Карамелька, Коржик и Компот учатся на географическом, экономическом и химическом факультетах (все на разных). Если Карамелька — географ, то Компот — не экономист. Если Коржик — не экономист, то Карамелька — географ. Если Компот — не географ, то Коржик — химик. Определите, кто на каком факультете учится.

Ответ: Компот — географ, Карамелька — химик, Коржик — экономист.

Решение. Пусть Карамелька — географ. Тогда Коржик уже не может быть географом, тогда Коржик — химик. Но Компот не географ и не экономист, то есть Компот тоже химик, а такого не может быть. То есть Карамелька не географ. Но тогда Коржик — экономист, так как в ином случае Карамелька был бы географом. Тогда Компот — географ, так как иначе Коржик был бы химиком. Тогда Карамелька — химик.

Задача 10. Какое наибольшее количество месяцев одного года могут иметь по пять пятниц?

Ответ: 5.

Решение. В году 52 полные недели и ещё 1 или 2 дня, значит, всего пятниц 52 или 53. В месяце минимум 4 полные недели, то есть хотя бы 4 пятницы. Если хотя бы в 6 месяцах будет по 5 пятниц, то в году будет хотя бы $6 \cdot 5 + 6 \cdot 4 = 54$ пятницы, чего не может быть. То есть в году не более 5 месяцев с 5 пятницами. Такой год есть (например, 2023-й: январь, март, июнь, сентябрь, декабрь).

Задача 11. В школе обучаются 1200 детей, причём у каждого из них ровно 5 уроков каждый день. На каждый урок приходит ровно 30 детей, и каждый учитель ведёт ровно 4 урока. Сколько учителей в школе?

Ответ: 50.

Решение. В школе 1200 детей, у каждого 5 уроков в день. Значит, общее количество посещений уроков за день: $1200 \cdot 5 = 6000$. На каждый урок приходит 30 детей, значит, количество уроков в день: $6000/30 = 200$. Каждый учитель ведёт 4 урока в день, значит, количество учителей: $200/4 = 50$.

Задача 12. Найдите натуральное число, ближайшее к 18052026, в записи которого все цифры различны.

Ответ: 18052346.

Решение. В числе 18052026 цифры 0 и 2 повторяются. Ближайшее число с различными цифрами — 18052346 (заменяем повторяющиеся 2 на 3, 4, 6 и добавляем недостающие цифры).

Задача 13. На одном острове жили Лжец, Правдолюб, Глупец и Хитрец. Лжец всегда лжёт, Правдолюб говорит правду, Глупец повторяет последний услышанный ответ (а если его спросить первым, отвечает как попало), а Хитрец даёт честный ответ, но на предыдущий заданный ему вопрос (на первый же вопрос отвечает как попало). Мудрый Ёжик в тумане наткнулся на них и решил выяснить, в каком порядке они стоят. Спросив всех по очереди:

«Ты Лжец?», он понял только, где Хитрец. Спросив всех в том же порядке: «Ты Хитрец?», он смог дополнительно определить, где Лжец, но полной ясности всё ещё не было. И лишь после того как на вопрос «Ты Глупец?» первый ответил «Да», Ёжику наконец стало ясно, в каком порядке стоят жители. Так в каком же порядке они стоят? («Как попало» означает, что ответ «Да» или «Нет» выбирается произвольно.)

Ответ: Глупец, Правдолюб, Хитрец, Лжец.

Решение. На первый вопрос «Ты Лжец?» Правдолюб и Лжец заведомо скажут «Нет». Поэтому узнать Хитреца и не узнать Глупца Ёж может только в одном случае: если Хитрец ответит «Да», а Глупец «Нет».

На второй вопрос «Ты Хитрец?» Правдолюб и Хитрец скажут «Нет» (Хитрец думает, что его спрашивают, Лжец ли он). Стало быть, Лжец распознаётся потому, что только он один сказал «Да».

Поскольку ответа первого человека на третий вопрос хватило Ёжу для определения всех, первым не стоял ни Хитрец, ни Лжец (их ответы Ёжик мог предсказать заранее). Первым не мог стоять и Правдолюб (он на третий вопрос ответил бы «Нет»), то есть первым был Глупец, который повторил ответ четвёртого на предыдущий вопрос. Теперь понятно, что четвёртый — Лжец.

Осталось две возможности: (1) Глупец, Хитрец, Правдолюб, Лжец и (2) Глупец, Правдолюб, Хитрец, Лжец.

Если бы имел место порядок (1), то Ёжик уже после первого опроса понял бы, что третий не Глупец, ведь он не повторил ответ второго. А тогда после второго опроса все бы однозначно определились, и последний вопрос не понадобился бы.

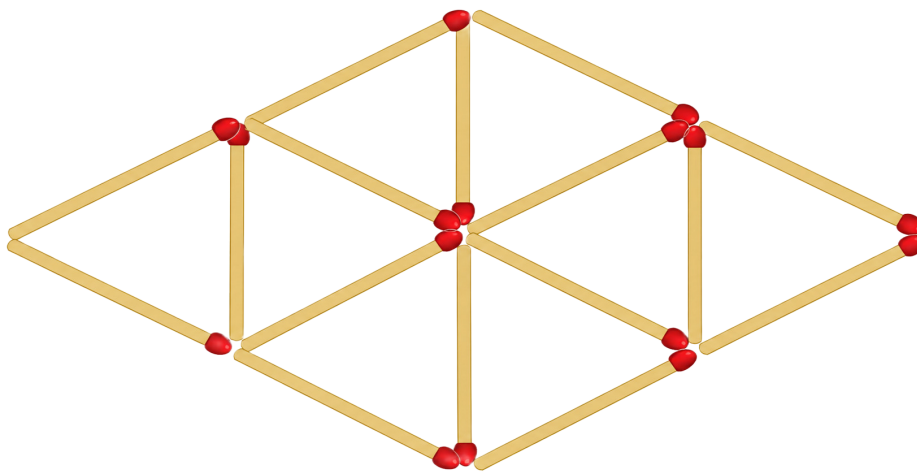
А вот в случае порядка (2) варианты «Глупец, Правдолюб, Хитрец, Лжец» и «Правдолюб, Глупец, Хитрец, Лжец» действительно не различались бы до последнего вопроса.

Задача 14. К некоторому натуральному числу прибавили сумму его цифр и получили 2026. Приведите пример такого числа.

Ответ: 2021.

Решение. $2021 + (2 + 0 + 2 + 1) = 2021 + 5 = 2026$.

Задача 15. Из 16 спичек сложен ромб со стороной в две спички, разбитый на треугольники со стороной в одну спичку (см. рисунок). Сколько спичек потребуется, чтобы сложить ромб со стороной в 10 спичек, разбитый на такие же треугольники?

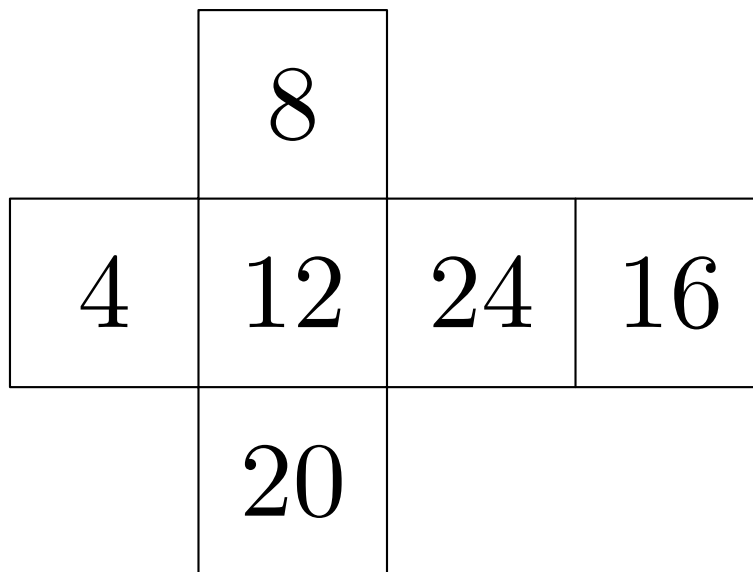


Ответ: 320.

Решение. Ромб со стороной 10 спичек сложен из 2 симметричных треугольников со стороной 10 спичек. Посчитаем количество спичек, из которых сложен один из треугольников. Разобьём его на ряды: первый ряд — 1 единичный треугольник, второй — 2, ..., десятый ряд — 10 единичных треугольников. Тогда большой треугольник будет составлен из $(1 + 2 + 3 + \dots + 10) \cdot 3 = 165$ спичек. Аналогично второй симметричный треугольник будет составлен из 165 спичек, но у них есть общая сторона, длина которой — 10 спичек. Тогда в нашем ромбе будет $165 + 165 - 10 = 320$ спичек.

Задача 16. На рисунке изображена развёртка куба, состоящая из шести квадратов. Расставьте в этих квадратах числа 4, 8, 12, 16, 20, 24 так, чтобы после складывания куба сумма чисел на противоположных гранях была одинаковой.

Решение.



§4.2 5 класс

§4.2.1 Домино

Задача 0-0. В данном равенстве переложите одну спичку так, чтобы выражение осталось верным.

$$6 + 2 - 4 = 4$$

Образец цифр: $|234567890$

Решение.

$$6 - 2 = 4 = 4$$

Задача 0-1. Табло электронных часов показывает 17:15. Какое время будут показывать электронные часы в следующий раз, когда сумма часов и минут будет такой же?

Ответ: 18:14.

Решение. Если в этот момент табло покажет 17 часов и x минут, то $17 + x = 17 + 15$, и тогда $x = 15$ — это тот же самый момент. Если же покажет 18 часов, то $18 + x = 17 + 15$, откуда $x = 14$. Значит, часы покажут 18:14.

Задача 0-2. Петя загадал число, умножил его на 3, вычел 2, разделил на 5 и прибавил 4. Получилось то же самое число. Какое число загадал Петя?

Ответ: 9.

Решение. Пусть Петя загадал число x . Тогда получим уравнение $\frac{3x - 2}{5} + 4 = x$, откуда следует ответ $x = 9$.

Задача 0-3. Саша задумал двузначное число, записал его на листок, но потом листок потерял. Он лишь вспомнил, что если к этому числу прибавить сумму его цифр, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Какое число задумал Саша?

Ответ: 45.

Решение. Пусть Саша загадал число $\overline{xy}$ (десятичная запись). Тогда

$$\overline{xy} + (x + y) = 10x + y + x + y = \overline{yx} = 10y + x.$$

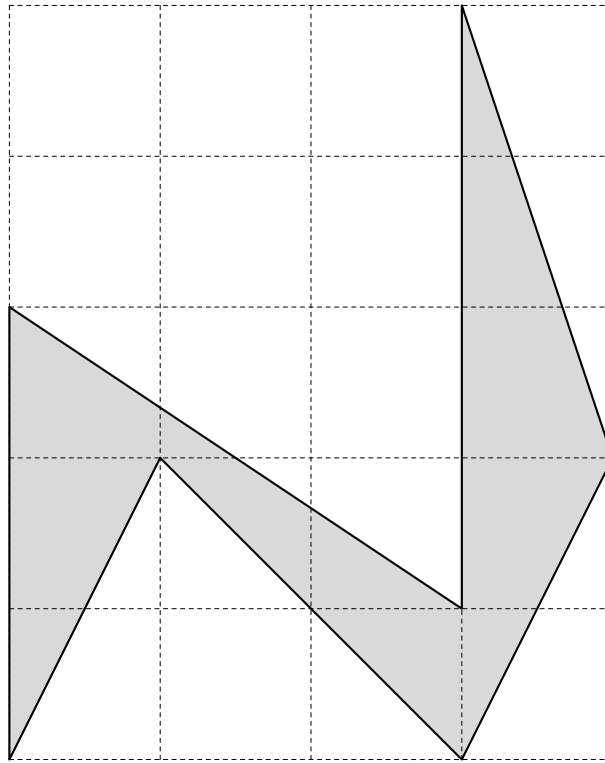
Значит, $10x = 8y$, то есть $5x = 4y$. Но x и y — цифры, не равные 0, значит, $x = 4$, а $y = 5$.

Задача 0-4. Запишите 6 подряд идущих чётных чисел так, чтобы наименьшее из них было в 2 раза меньше наибольшего.

Ответ: 10, 12, 14, 16, 18, 20.

Решение. Пусть наименьшее число $2x$, тогда наибольшее, с одной стороны, равно $2x + 2 \cdot 5$, а с другой — $4x$. Следовательно, $2x = 10$, откуда следует ответ.

Задача 0-5. Найдите площадь фигуры, изображённой на рисунке. Длина стороны клетки — 10 см.



Ответ: 550 см^2 .

Решение. Из площади прямоугольника $40 \times 50 = 2000$, в котором лежит фигура, вычтем площади всех незакрашенных частей:

$$2000 - 20 \cdot 30 - \frac{20 \cdot 30}{2} - \frac{10 \cdot 30}{2} - \frac{10 \cdot 20}{2} - \frac{10 \cdot 20}{2} - \frac{20 \cdot 20}{2} = 550.$$

Задача 0-6. Периметр прямоугольного листа бумаги равен 100 см. Его разрезали на 4 прямоугольника. Сумма периметров всех частей в 2 раза больше периметра листа. Чему равна длина разрезов?

Ответ: 50 см.

Решение. Длина разрезов считается дважды при подсчёте суммы периметров прямоугольников. Тогда сумма периметров равна удвоенной сумме разрезов плюс периметр листа, то есть удвоенная длина разрезов равна $200 - 100 = 100$, откуда разрез имеет длину 50.

Задача 1-1. Варя вышла из школы на 10 минут позже Вики, но шла в 2 раза быстрее. Через какое время она догонит Вику?

Ответ: 10 минут.

Решение. Пусть в момент, когда Варя вышла из школы, между ними было расстояние x . Тогда Вика проходит x за 10 минут, а Варя — $2x$ за 10 минут. Расстояние между ними x , значит, они его сократят за 10 минут.

Задача 1-2. Два рыбака ели четырёх карасей 5 дней. Сколько карасей нужно, чтобы прокормить 4 таких рыбаков в течение месяца (30 дней)?

Ответ: 48.

Решение. Из условия следует, что 4 рыбака едят 8 карасей за 5 дней. Тогда за 30 дней 4 рыбака едят $8 \cdot 6 = 48$ карасей.

Задача 1-3. Ленивец Ленни сделал «ленивые» электронные часы: в них одна минута длится один год. 1 января 2026 года он выставил на них время 20:26, завёл будильник на 22:00 и заснул. В каком году будильник зазвонит?

Ответ: 2120.

Решение. От 20:26 до 22:00 всего 94 минуты. Тогда Ленни проснётся в $2026 + 94 = 2120$ году.

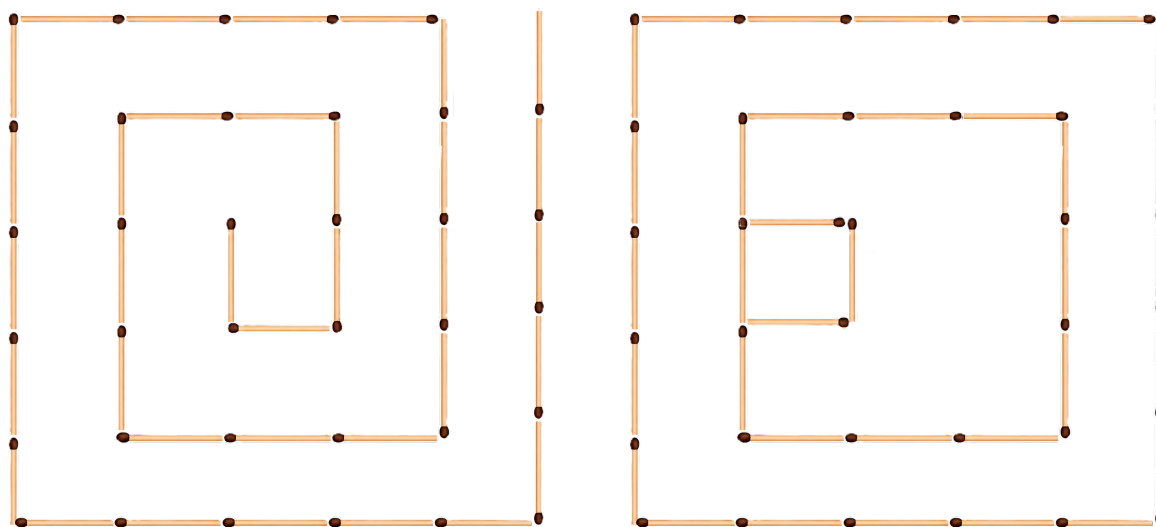
Задача 1-4. Мартышка, Осёл и Козёл затеяли сыграть трио. Уселись чинно в ряд, Мартышка справа. Ударили в смычки, дерут, а толку нет. Поменялись местами, при этом Осёл оказался в центре. А трио всё нейдёт на лад. Пересели ещё раз. При этом оказалось, что каждый из трёх «музыкантов» успел посидеть и слева, и справа, и в центре. Кто где сидел на третий раз?

Ответ: слева — Козёл, посередине — Мартышка, справа — Осёл.

Решение. Во второй раз Мартышка сидела не справа (там уже сидела) и не по центру (там Осёл). Значит, во второй раз она сидела слева, посередине — Осёл, справа — Козёл. Аналогичными рассуждениями в первый раз слева сидел Осёл, посередине — Козёл, справа — Мартышка. Значит, в третий раз слева — Козёл, посередине — Мартышка, справа — Осёл.

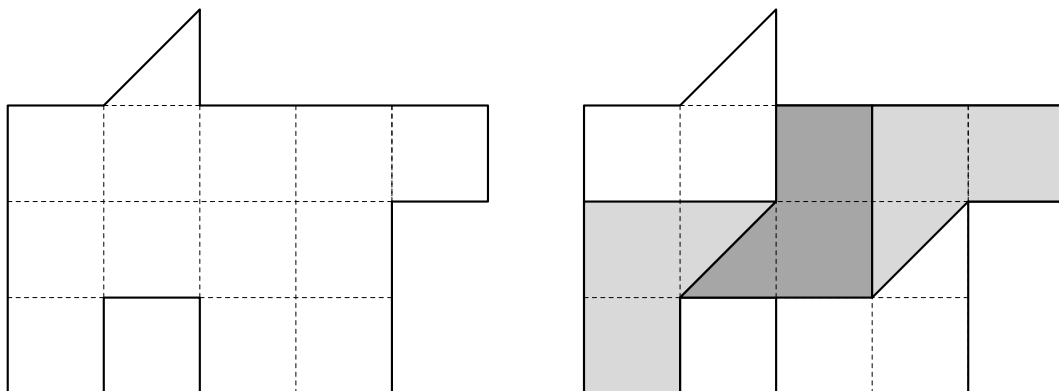
Задача 1-5. Из 35 спичек выложена фигура, напоминающая «спираль». Переложите 4 спички так, чтобы получились 3 квадрата.

Решение.



Задача 1-6. Разрежьте, пожалуйста, фигуру на 5 равных частей (фигуры называются равными, если они совмещаются при наложении, фигуры можно переворачивать).

Решение.



Задача 2-2. Найдите наименьшее натуральное число N , которое при умножении на 19 даёт число с суммой цифр N ?

Ответ: 10.

Решение. Перебор: $1 \cdot 19 = 19$, $2 \cdot 19 = 38$, $3 \cdot 19 = 57$, $4 \cdot 19 = 76$, $5 \cdot 19 = 95$, $6 \cdot 19 = 114$, $7 \cdot 19 = 133$, $8 \cdot 19 = 152$, $9 \cdot 19 = 171$, $10 \cdot 19 = 190$. Нетрудно убедиться, что из представленных чисел подходит только 10.

Задача 2-3. На репетиции спектакля 24 человека стояли на сцене. У некоторых из них на лицах были маски. Каждую минуту эти люди снимали маски и отдавали их кому-то (в любой момент времени у одного человека не могло быть больше 1 маски, передавать маску человеку, у которого была маска в прошлую минуту, нельзя). После репетиции ровно 12 человек отметили, что каждый из них отдавал маску большее количество раз, чем получал. Сколько всего было масок?

Ответ: 12.

Решение. Каждый человек отдаёт и получает маску поочерёдно (не учитывая, в какие минуты он это делал). Тогда человек может отдавать маску большее количество раз, чем получать, только если он и начал, и закончил этим действием. Значит, в начале у этих 12 человек были маски. Но они должны были их кому-то отдать в 1-й ход, а оставшихся людей — 12. Значит, масок ровно 12.

Задача 2-4. На глобусе проведены 17 параллелей и 24 меридиана. На сколько частей разделена поверхность глобуса?

Ответ: 432.

Решение. Параллели делят глобус на 18 «ободков», меридианы делят каждый «ободок» на 24 части. Всего частей $24 \cdot 18 = 432$.

Задача 2-5. Сёстры Вика и Варя очень любят конфеты, но, как нам всем известно, кушать много сладкого вредно для зубов. Поэтому их мама дала девочкам x конфет и попросила распределить их на y дней. Вика попробовала на каждый день выделять по одной конфете, но тогда одна конфета осталась бы лишней. Варя попробовала на каждый день выделять по 2 конфеты, но тогда в какой-то день ей пришлось бы остаться без сладкого. Как вы думаете, какие значения могли принимать x и y ?

Ответ: $x = 4$, $y = 3$.

Решение. С одной стороны $x = y + 1$ (конфет на одну больше, чем дней), с другой стороны $x = 2(y - 1) = 2y - 2$. То есть $y + 1 = 2y - 2$, тогда $y = 3$ и $x = y + 1 = 4$.

Задача 2-6. Представьте число 33 как сумму 12 слагаемых с одинаковыми суммами цифр.

Решение. Например, 11 двоек и одиннадцать:

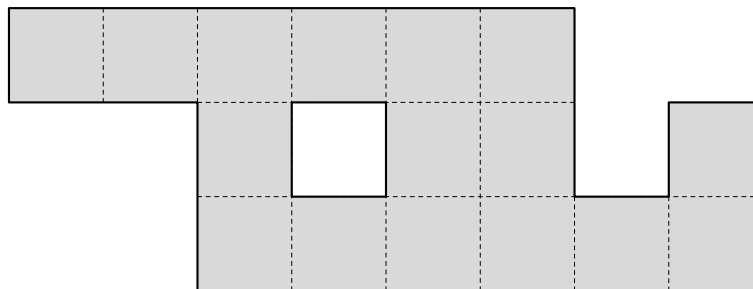
$$2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 11 = 33.$$

Задача 3-3. В городе Рубиновом 15 школ. Можно ли их соединить дорогами так, чтобы каждая школа была соединена ровно с пятью другими?

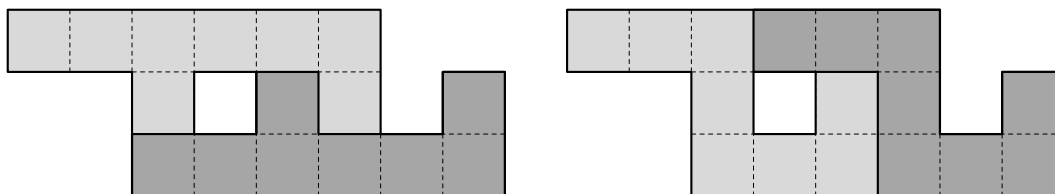
Ответ: нет.

Решение. Представим 15 школ в виде графа, где сами школы — вершины, а дороги между ними — рёбра. Тогда по «лемме о рукопожатиях» в графе должно быть чётное количество вершин нечётной степени, что противоречит условию.

Задача 3-4. Разрежьте фигуру на две одинаковые части двумя различными способами.



Решение.



Задача 3-5. Сколько нужно сделать прямолинейных разломов, чтобы разделить шоколадку размером 5×7 на 35 долек по линиям между дольками? За один раз можно ломать только один кусок по прямой линии, параллельной стороне шоколадки.

Ответ: 34.

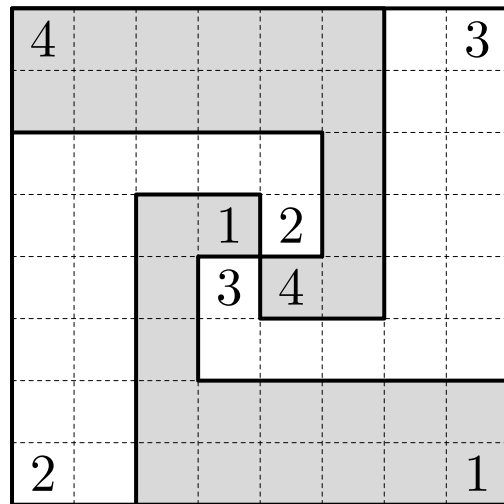
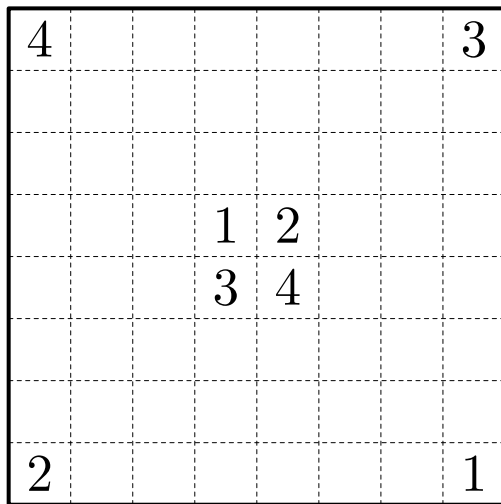
Решение. При каждом разламывании количество кусков увеличивается на 1. Было 1, стало 35, значит, 34 разлома.

Задача 3-6. Натуральное число называется палиндромом, если оно не изменяется при выписывании его цифр в обратном порядке (например, числа 22, 404, 7887 — палиндромы, а 245, 670, 2025 — нет). Представьте число 2026 в виде суммы 3 палиндромов.

Решение. Например, $2026 = 2002 + 22 + 2$.

Задача 4-4. Разрежьте квадрат 8×8 на 4 равные фигуры так, чтобы в каждой было 2 одинаковые цифры.

Решение.



Задача 4-5. Однажды Ваня и Толя зашли в кабинет и увидели на доске 4 ненулевые цифры. Ваня составил из них минимальное возможное четырёхзначное число, а Толя — максимальное возможное четырёхзначное. Сумма их чисел оказалась равна 11990. Какие числа могли быть составлены?

Ответ: 1999 и 9991.

Решение. Обозначим цифры, из которых были составлены числа, в порядке возрастания: A, B, C, D . Тогда самое маленькое число, составленное из этих цифр — $\overline{ABCD}$, а самое большое — $\overline{DCBA}$. Мы получаем ребус $\overline{ABCD} + \overline{DCBA} = 11990$ (в котором разные буквы могут обозначать и одинаковые цифры). Сразу ясно, что $A + D = 10$. Значит, из разряда сотен в разряд тысяч перешла единица, то есть $B + C > 9$. Теперь из разряда десятков видно, что $B + C = 18$. Поэтому $B = C = 9$. Следовательно, $D = 9$, а $A = 1$.

Задача 4-6. Сколькими способами можно переставить числа от 1 до 100 так, чтобы соседние числа отличались не более, чем на 1?

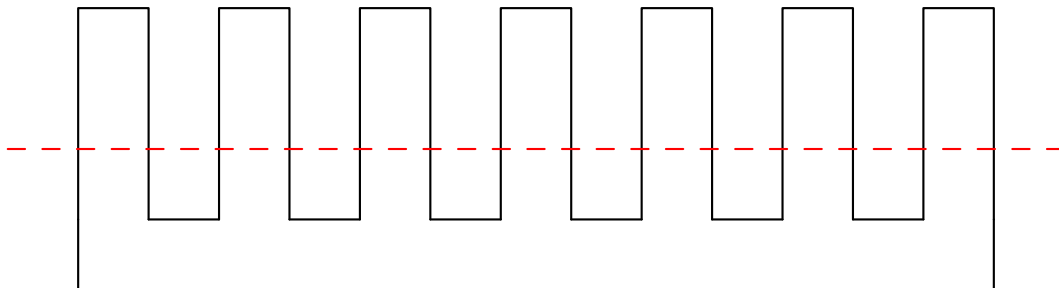
Ответ: 2.

Решение. Число 1 не может иметь больше одного соседа, поэтому стоит с краю. Тогда рядом с ним стоит 2, дальше 3, 4 и т. д. Значит, перестановок две: от 1 до 100 и от 100 до 1.

Задача 5-5. Можно ли испечь пирог, который одним прямолинейным разрезом делился бы на 8 частей? Если да, приведите пример.

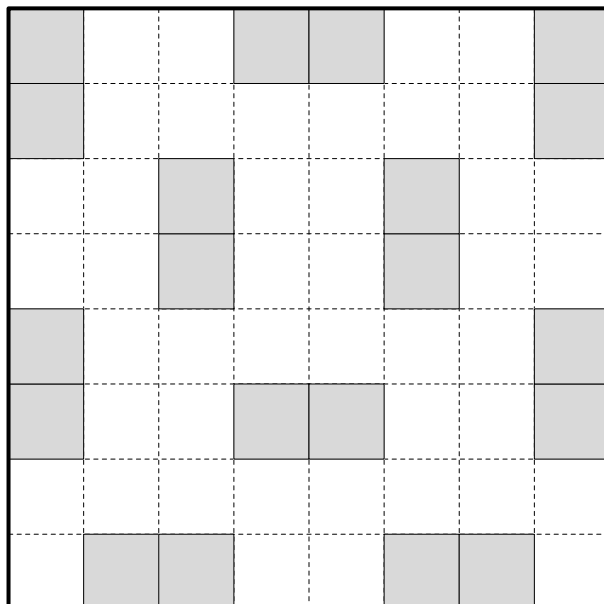
Ответ: Да, можно.

Решение.



Задача 5-6. Отметьте на доске 8×8 несколько клеток так, чтобы любая (в том числе и любая отмеченная) клетка граничила по стороне ровно с одной отмеченной клеткой.

Решение.

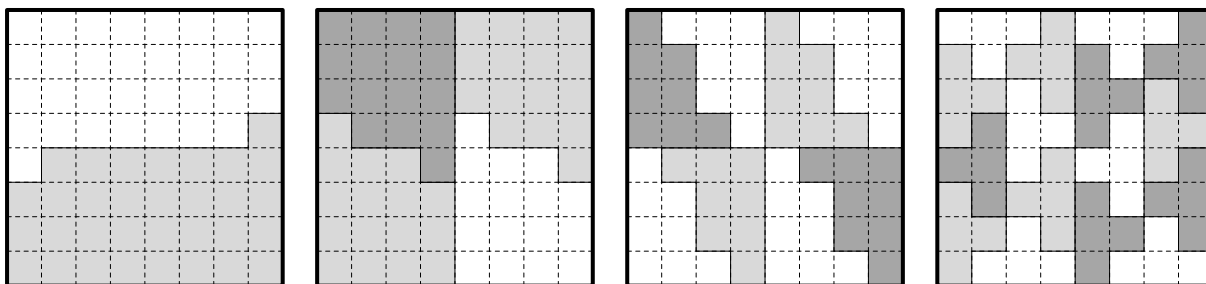


Задача 6-6. На сколько равных восьмиугольников можно разрезать квадрат размером 8×8 ? Укажите все возможные варианты и приведите к каждому пример (все разрезы должны проходить по линиям сетки).

Ответ: 2, 4, 8, 16.

Решение. Площадь квадрата должна делиться на площадь каждого восьмиугольника. Но весь квадрат, одна клетка или доминошка — не восьмиугольник, поэтому подходят только делители числа 64, не равные 1, 32 и 64 — 2, 4, 8, 16.

Примеры на 2, 4, 8 и 16 соответственно:



§4.2.2 Пенальти

Задача 1. Сколько существует трёхзначных чисел, состоящих только из 0 и 1?

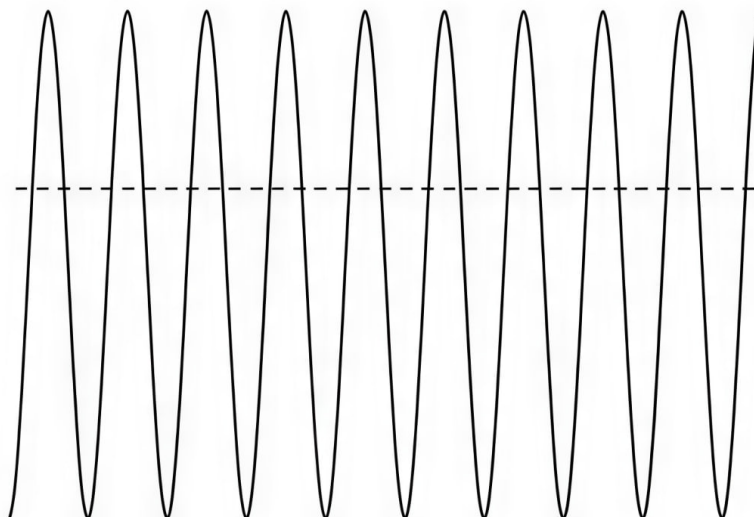
Ответ: 4.

Решение. В разряд сотен можно поставить только 1, в разряды десятков и единиц — 0 или 1, поэтому вариантов всего $1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$.

Задача 2. Шнур разделили на 19 равных частей и сложили змейкой. После этого сделали разрез по пунктирной линии. Шнур распался на 20 кусков: самый длинный из них — 12 метров, самый короткий — 4 метра. Чему была равна длина шнура до того, как его разрезали? Ответ выразите в метрах.

Ответ: 190 метров.

Решение. Длина одной из 19 равных частей $12/2 + 4 = 10$ (так как самая длинная часть — длинный сложенный пополам кусок, самая короткая — самый правый кусок на картинке).

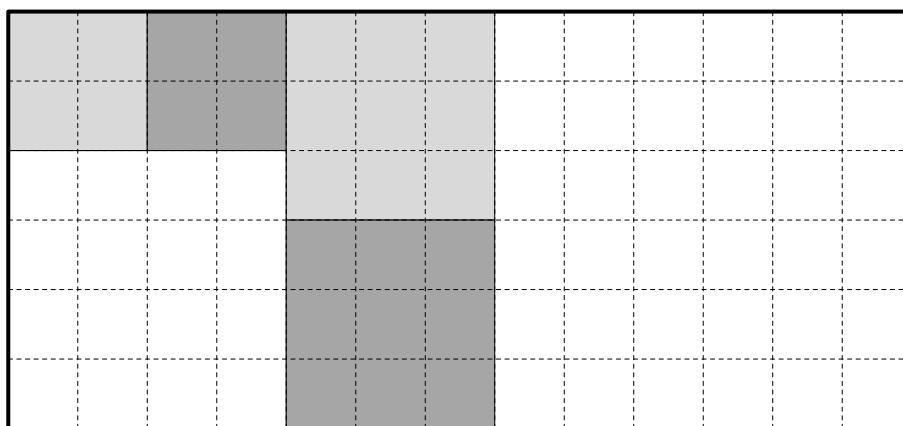


Тогда длина шнура равна $10 \cdot 19 = 190$ метров.

Задача 3. На листе в клетку нарисован прямоугольник 6×13 . Можно ли разрезать его по линиям сетки ровно на 6 квадратов? Если да, то приведите пример.

Ответ: Да, можно.

Решение.



Задача 4. В сказочном лесу живут единороги и драконы. У каждого единорога 1 рог и 1 голова, а у каждого дракона — 3 рога и тоже 1 голова. Однажды лесник насчитал в лесу 40 голов и 84 рога. Сколько единорогов и сколько драконов живут в этом лесу?

Ответ: 18 единорогов и 22 дракона.

Решение. Обозначим количество единорогов за x , а количество драконов за y . Тогда по условию: $x + y = 40$, $x + 3y = 84$. Вычтем из второго первое: $x + 3y - x - y = 2y = 44$, откуда $y = 22$, а значит, $x = 40 - y = 40 - 22 = 18$.

Задача 5. Мария покупает 16 веточек цветов к 8 марта. В магазине есть цветы трёх видов: розы, тюльпаны и пионы. Сколько существует вариантов различных покупок 16 веточек,

если Мария хочет, чтобы цветочки каждого вида составляли не менее четверти от всего букета?

Ответ: 15.

Решение. По условию задачи нам заведомо надо купить 4 розы, 4 тюльпана и 4 пиона. Остаётся купить 4 цветка, каждый из которых может быть любого сорта. Рассмотрим возможные варианты:

- 1) Все 4 цветка одного сорта. Таких вариантов 3 — по числу сортов.
 - 2) Три цветка одного сорта, а четвёртый — другого. Первый сорт выбирается 3 способами, второй — 2. Всего 6 вариантов.
 - 3) Два цветка одного сорта, а два — другого. Группы одного размера. Выбрать пару из 3 сортов можно 3 способами.
 - 4) Два цветка одного сорта, один — другого и один — третьего. И таких вариантов 3.
- Итого: $3 + 6 + 3 + 3 = 15$.

Задача 6. Одним пакетиком чая можно заварить два или три стакана чая. Мила и Таня разделили коробку чайных пакетиков поровну. Мила заварила 57 стаканов чая, а Таня — 83 стакана. Сколько пакетиков могло быть в коробке?

Ответ: 28.

Решение. Пусть у каждой из девочек было x пакетиков. Тогда каждый пакетик был использован хотя бы 2 раза и не больше чем 3. Тогда $3x \geq 83 \geq 2x$ и $3x \geq 57 \geq 2x$. Отсюда $83/3 \leq x \leq 57/2$, то есть $27\frac{2}{3} \leq x \leq 28\frac{1}{2}$, значит, $x = 28$ (так как x — натуральное число).

Задача 7. Лотерейный билет будем считать счастливым, если между его цифрами можно в некоторых местах расставить знаки четырёх арифметических действий и скобки так, чтобы значение полученного выражения равнялось 100. Является ли счастливым билет №123456? Если да, то приведите пример такого выражения.

Ответ: Да.

Решение. $1 + (2 + 3 + 4) \cdot (5 + 6) = 1 + 9 \cdot 11 = 100$.

Задача 8. Артемий выписал в тетрадь все четырёхзначные числа, произведение цифр которых равняется 3. Какова сумма чисел, выписанных Артемием?

Ответ: 6666.

Решение. Заметим, что произведение цифр может быть равно 3, только если все цифры, кроме одной, равны 1 (так как 3 — простое). Тогда Артемий выписал числа 3111, 1311, 1131, 1113. Значит, сумма равна $3111 + 1311 + 1131 + 1113 = 6666$.

Задача 9. Про далёкий город N , где могут жить только люди с именами Иван, Роман или Макар, известно, что все Иваны врут Романам, все Романы — Макарам, все Макары — Иванам, а во всех остальных случаях жители города N говорят правду. Однажды, на день рождения мэра этого города, несколько горожан водили хоровод. Каждый сказал своему правому соседу: "Я — Иван". Сколько в этом хороводе могло быть Романов?

Ответ: 0.

Решение. Заметим, что если в хороводе есть хотя бы один Макар, то его правый сосед — обязательно Иван (потому что Макар врёт только Ивану), а правый сосед этого Ивана — Макар или Иван (потому что Иваны лгут Романам и только Романам). Получается, что если в хороводе есть хотя бы один Макар или Иван, то Романов в этом хороводе нет. Из одних Романов хоровод тоже состоять не может, так как тогда они лгали бы друг другу. Значит, Романов в хороводе не было.

Задача 10. В течение года цены на розы два раза поднимали на 50%, а после 8 марта их стали продавать за полцены. Сколько стоит сейчас одна роза, если в начале года она стоила 80 рублей?

Ответ: 90 рублей.

Решение. После первого повышения 1 роза стоила $80 \cdot 1,5 = 120$, после второго $120 \cdot 1,5 = 180$. Тогда после 8 марта она стоила $180/2 = 90$.

Задача 11. Виталий совсем не знает математику, даже плохо разбирается в знаках арифметических действий — умножение путает с делением, а сложение — с вычитанием. В некотором примере ему надо было из первого числа вычесть второе и домножить результат на третье число. Он вместо этого к первому числу прибавил второе и результат поделил на третье. Тем не менее ему повезло — результат оказался верным. Придумайте такой пример.

Решение.

$$(5 - 3) \cdot 2 = 2 \cdot 2 = 4,$$

$$(5 + 3) : 2 = 8 : 2 = 4.$$

Задача 12. Каждый день из леса выходят парами ежи и ежихи (в любой паре 1 ёж и 1 ежиха). Известно, что у каждого ежа на иголках либо вдвое больше, либо вдвое меньше яблок, чем на иголках у его ежихи. К тому же лесник недавно заметил, что суммарное количество яблок у ежей и ежих всегда больше 2026. Какое наименьшее значение оно может принимать?

Ответ: 2028.

Решение. Заметим, что количество яблок в паре всегда кратно 3. Тогда всего количество яблок у всех ежей кратно 3. Наименьшее число, большее 2026 и кратное 3 — 2028.

Пример: в каждой паре ежиха несёт 1 яблоко, ёж — 2, и таких пар — 676.

Задача 13. Площадь пересечения прямоугольника и круга составляет 36% площади их объединения, при этом площадь круга вне прямоугольника составляет 20% площади их объединения. Сколько процентов площади прямоугольника находится вне круга?

Ответ: 44%.

Решение. Пусть площадь круга вне прямоугольника — A , площадь пересечения прямоугольника и круга — B , площадь прямоугольника вне круга — C . Тогда $B = 0,36(A + B + C)$, а $A = 0,2(A + B + C)$. То есть $A + B = 0,56(A + B + C)$, что равносильно $A + B + C = 0,56(A + B + C) + C$, откуда $C = 0,44(A + B + C)$, что и требовалось найти.

Задача 14. На фестивале Мише и Роме предложили поучаствовать в конкурсе за сладкую вату. Для того чтобы победить, им нужно проплыть на лодке от пристани до буйка, расположенного относительно пристани вниз по течению реки, и обратно. Расстояние от пристани до буйка — 225 метров, скорость лодки — 15 метров в секунду, а скорость реки — 10 метров в секунду. Через сколько секунд после начала они приплывут к финишу?

Ответ: 54 секунды.

Решение. По течению скорость лодки $15 + 10 = 25$ метров в секунду (так как река "ускоряет" лодку), следовательно, они проплывут 225 метров за $225/25 = 9$ секунд. Обратно же их скорость $15 - 10 = 5$ метров в секунду (так как река "тормозит" лодку), а проплывут оставшиеся 225 метров они за $225/5 = 45$ секунд. Значит, всего им нужно будет $45 + 9 = 54$ секунды.

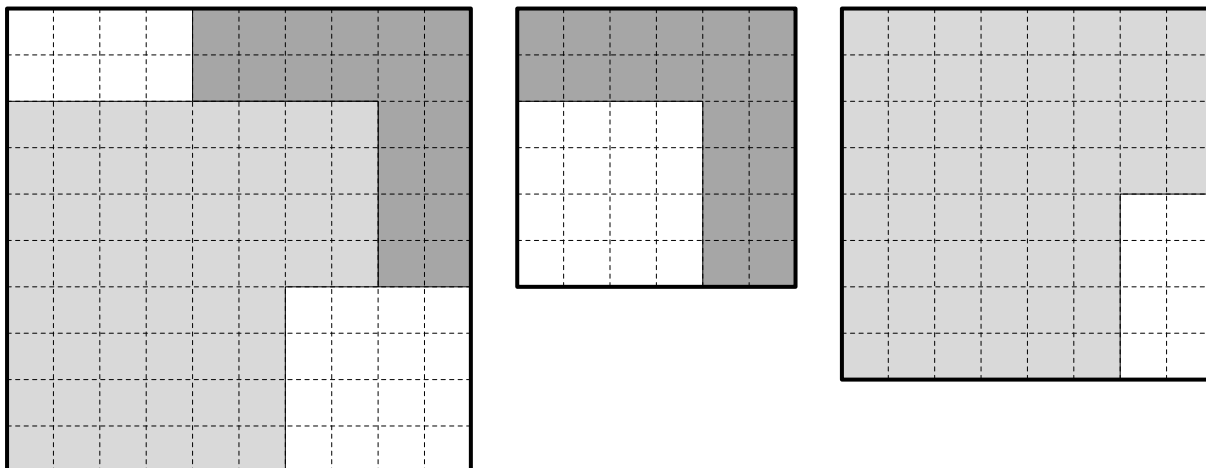
Задача 15. Эксперт представляет судье 9 одинаковых по внешнему виду монет. Судья знает, что среди представленных монет есть по три монеты весом 1, 2 и 3 грамма. Эксперт сообщил судье, какая монета сколько весит, а также он принёс с собой прибор, который за одну операцию с двумя группами монет сообщает, весят ли эти группы одинаково или нет. За какое наименьшее число операций эксперт сможет доказать судье, что каждая монета действительно весит столько, сколько он сказал?

Ответ: 2.

Решение. Первым действием эксперт положит на одну чашу весов все монеты по 3 г, а на другую — все остальные. Чаши весов придут в равновесие. Судья видит, что масса 3-х монет равна массе оставшихся 6, а такое возможно только если массы трёх монет на одной чаше — 3 грамма (то есть максимальные из возможных), а на другой — остальные. Далее он берёт любую монету весом 3 грамма и сравнивает со всеми монетами весом 1 грамм. Точно так же равенство будет возможно, только если три монеты по 1 грамму действительно являются таковыми, иначе сумма их весов будет больше, чем 3 грамма.

Задача 16. Даны два квадрата: 6×6 и 8×8 . Как разрезать (по линиям сетки) каждый из них на две части так, чтобы из получившихся четырёх частей можно было сложить квадрат?

Решение.



§4.3 6 класс

§4.3.1 Домино

Задача 0-0. В равенстве

$$101 - 102 = 1$$

передвиньте одну цифру так, чтобы оно стало верным.

Ответ: $101 - 10^2 = 1$.

Решение. Если цифру 2 в числе 102 передвинуть вверх, на место показателя степени, то исходное равенство примет вид $101 - 10^2 = 1$ и будет верным.

Задача 0-1. В сказочном лесу живут единороги и драконы. У каждого единорога 1 рог, а у каждого дракона — 3 рога. Однажды лесник насчитал в лесу 40 голов и 84 рога. Сколько единорогов и сколько драконов живут в этом лесу?

Ответ: 18 единорогов и 22 дракона.

Решение. Пусть x — количество единорогов, а y — количество драконов. $x + y = 40$, поскольку у каждого животного по одной голове. Общее количество рогов, согласно условию: $1x + 3y = 84$. Вычтем из второго уравнения первое: $3y - y = 84 - 40$, $2y = 44$, $y = 22$, откуда получаем x : $x = 40 - y = 40 - 22 = 18$, то есть всего $y = 22$ дракона и $x = 18$ единорогов.

Задача 0-2. Сколько решений у ребуса

$$Т \cdot Ю \cdot М = 72,$$

где различные буквы обозначают разные цифры?

Ответ: 18.

Решение. Число 72 можно представить в виде произведения 3 различных цифр только тремя способами: $72 = 1 \cdot 8 \cdot 9$; $2 \cdot 4 \cdot 9$; $3 \cdot 4 \cdot 6$. Для каждого найденного набора из трёх различных цифр существует $3! = 6$ способов сопоставить цифры буквам Т, Ю, М. Значит всего решений у ребуса будет $6 + 6 + 6 = 18$.

Задача 0-3. Два рыбака делили свой улов. Сначала первый отдал второму половину своих рыб, потом второй отдал первому половину своих. После этого у первого оказалось 15 рыб, а у второго — 9. Сколько рыб было у каждого рыбака до обмена?

Ответ: У каждого было по 12 рыб.

Решение. Будем решать с конца. Последним действием второй отдал половину своих рыб первому, значит до этого у второго было $9 \cdot 2 = 18$ рыб, а у первого $15 - 9 = 6$ рыб. До этой передачи первый отдал половину своих рыб второму, значит в самом начале у первого было $6 \cdot 2 = 12$ рыб и у второго $18 - 6 = 12$ рыб.

Задача 0-4. На празднике было 24 школьника: мальчики и девочки. Оказалось, что каждый мальчик знает ровно 5 девочек, а каждая девочка — 7 мальчиков. Сколько мальчиков и девочек пришло на праздник?

Ответ: 14 мальчиков и 10 девочек.

Решение. Пусть на празднике было x мальчиков и $24 - x$ девочек. Заметим, что можно посчитать количество знакомств двумя способами: с одной стороны каждый мальчик знает 5 девочек, значит всего знакомств $5x$; с другой стороны каждая девочка знает 7 мальчиков, значит всего знакомств $(24 - x) \cdot 7$. Приравняем эти выражения: $5x = (24 - x) \cdot 7$, $5x = 168 - 7x$, $12x = 168$, $x = 14$. Значит было 14 мальчиков и $24 - 14 = 10$ девочек.

Задача 0-5. Представьте число 29 как сумму 10 натуральных слагаемых с одинаковыми суммами цифр.

Ответ: $2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 11 = 29$.

Задача 0-6. На доске написали два числа — первое и второе. К первому прибавили второе и получили третье. Ко второму прибавили третье и получили четвёртое и так далее. Чему равна сумма шести выписанных чисел, если пятое число равно 6?

Ответ: 24.

Решение. Пусть первое число a , второе — b . Тогда третье число — $a + b$, четвёртое — $a + 2b$, пятое — $2a + 3b$, шестое — $3a + 5b$. Посчитаем сумму всех шести чисел: $a + b + (a + b) + (a + 2b) + (2a + 3b) + (3a + 5b) = 8a + 12b = 4(2a + 3b)$. Заметим, что пятое число равно $2a + 3b = 6$, по условию. Тогда сумма выписанных чисел равна $4 \cdot (2a + 3b) = 4 \cdot 6 = 24$.

Задача 1-1. Назовём натуральное число «замечательным», если оно состоит только из чётных цифр. Сколько существует трёхзначных «замечательных» чисел, все цифры которых различны?

Ответ: 48.

Решение. Всего есть 5 чётных цифр (0, 2, 4, 6, 8). Первая цифра: 4 варианта, так как ноль быть не может. Вторая цифра: тоже 4 варианта, потому что добавляется ноль и исключается цифра, которая уже стоит на первом месте. Третья цифра: 3 варианта, так как 2 цифры уже выбраны. Значит всего замечательных чисел $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$.

Задача 1-2. Яся, Гриша и Яша идут вместе на занятия. Пока Яся делает 2 шага, Гриша делает 4 шага. Пока Гриша делает 3 шага, Яша делает 5 шагов. Гриша и Яша посчитали, что вместе они сделали 640 шагов. Сколько шагов сделала Яся?

Ответ: 120.

Решение. Пока Гриша сделает 6 шагов, Яся сделает 3 шага, а Яша сделает 10 шагов. Теперь мы можем записать количество шагов всех троих в виде единой пропорции $3 : 6 : 10$. По условию Гриша и Яша сделали вместе 640 шагов. Значит количество шагов Яси равно $\frac{640}{10+6} \cdot 3 = 120$.

Задача 1-3. По кругу расставлены цифры 1, 2, 3, ..., 9 в произвольном порядке. Каждые две цифры, стоящие подряд по часовой стрелке, образуют двузначное число. Найдите все возможные суммы всех девяти таких чисел.

Ответ: 495.

Решение. Двузначное число $\overline{xy}$, у которого в разряде десятков — цифра x , а в разряде единиц — цифра y , равно $10x + y$. Можно заметить, что каждая цифра от 1 до 9 встречается ровно один раз в разряде десятков и ровно один раз в разряде единиц. То есть каждая цифра один раз войдёт в нашу сумму с коэффициентом 10 и один раз — с коэффициентом 1. Значит, искомая сумма не зависит от порядка записи цифр и равна $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9)(10 + 1) = 495$.

Задача 1-4. Какой цифрой оканчивается число

$$1! + 2! + 3! + \dots + 2026!,$$

где $n!$ — произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно?

Ответ: 3.

Решение. Начиная с $5!$ (120), все факториалы оканчиваются на 0 , так как делятся на 10 . Поэтому последняя цифра определяется суммой первых четырёх членов: $1! + 2! + 3! + 4! = 1 + 2 + 6 + 24 = 33$, последняя цифра — 3 .

Задача 1-5. Расстояние от пункта A до пункта B равно 42 км. Из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу выехали 2 велосипедиста. Известно, что они встретились через $1,5$ часа. После встречи велосипедист, выехавший из A , приехал в B спустя 2 часа с момента встречи. Найдите скорости велосипедистов.

Ответ: 12 км/ч и 16 км/ч.

Решение. Известно, что велосипедист, выехавший из A , доехал до пункта B за $1,5$ ч $+ 2$ ч $= 3,5$ ч, значит его скорость равна 42 км $/ 3,5$ ч $= 12$ км/ч. Скорость сближения (сумма скоростей обоих велосипедистов) равна 42 км $/ 1,5$ ч $= 28$ км/ч. Значит скорость второго велосипедиста равна 28 км/ч $- 12$ км/ч $= 16$ км/ч.

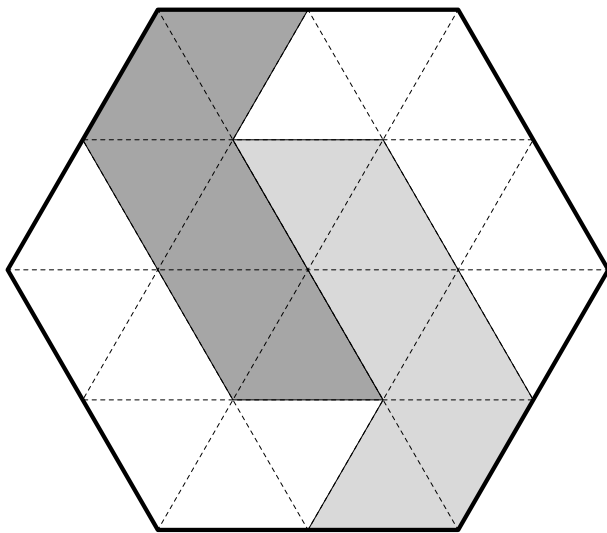
Задача 1-6. На доске были написаны 10 последовательных натуральных чисел. Когда стёрли одно из них, то сумма девяти оставшихся оказалась равна 2614 . Какие числа остались на доске?

Ответ: $286, 287, 288, 289, 290, 292, 293, 294, 295$.

Решение. Пусть x — наименьшее из написанных чисел. Обозначим через $x + y$ вычеркнутое число ($0 \leq y \leq 9$). Тогда $x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + (x + 4) + (x + 5) + (x + 6) + (x + 7) + (x + 8) + (x + 9) - (x + y) = 2614$. То есть $9x = 2569 + y$. Следовательно, $(2569 + y)$ кратно 9 , а также $2569 \equiv 4 \pmod{9}$, значит $y \equiv 5 \pmod{9}$, $y = 5$, так как $0 \leq y \leq 9$. Значит $x = (5 + 2569)/9 = 286$. Стёрли число $x + y = 286 + 5 = 291$.

Задача 2-2. Разрежьте нарисованный многоугольник на четыре одинаковые фигуры. Резать можно только по линиям сетки.

Решение.



Задача 2-3. Решите уравнение

$$\overline{AAB} + \overline{ABA} + \overline{BAA} = 2775,$$

если одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, а разным — разные.

Ответ: $A = 8$ и $B = 9$; $A = 9$ и $B = 7$.

Решение. $\overline{AAB} = 110A + B$, $\overline{ABA} = 101A + 10B$, $\overline{BAA} = 11A + 100B$. Складываем: $110A + B + 101A + 10B + 11A + 100B = 222A + 111B = 2775$. Поделим на 111: $2A + B = 25$. A и B — цифры, A от 1 до 9, B от 0 до 9. $2A + B = 25$, $B \leq 9 \Rightarrow 2A \geq 16 \Rightarrow A \geq 8$. $A = 8 \Rightarrow B = 9$, $A = 9 \Rightarrow B = 7$.

Задача 2-4. Вася сказал Маше: «Сейчас мне вдвое больше лет, чем было тебе тогда, когда мне было столько лет, сколько тебе теперь. А когда тебе будет столько лет, сколько мне теперь, нам вместе будет 54 года». Сколько лет каждому из них?

Ответ: Васе 24, Маше 18.

Решение. Пусть сейчас возраст Васи — x , Маши — y . Разница возрастов постоянна: $x - y$. Когда-то в прошлом у Васи было столько лет, сколько у Маши сейчас, то есть y ; это было $x - y$ лет назад. Тогда Маше было $y - (x - y) = 2y - x$ лет, а по условию сейчас Васе вдвое больше, чем было Маше тогда, значит $x = 2(2y - x)$, откуда $x = 4y - 2x$, $3x = 4y$. Когда Маше будет столько лет, сколько Васе сейчас (x), пройдёт $x - y$ лет; к тому моменту Васе будет $x + (x - y) = 2x - y$. По условию, «нам вместе будет 54 года», значит $x + (2x - y) = 54$, то есть $3x - y = 54$. Имеем систему: $3x = 4y$, $3x - y = 54$. Из первого уравнения $y = 3x/4$. Подставляем во второе: $3x - 3x/4 = 54$, $(12x - 3x)/4 = 54$, $9x/4 = 54$, $9x = 216$, $x = 24$, $y = 3 \cdot 24/4 = 18$.

Задача 2-5. Миша любит загадывать желание, смотря на время. Если время полностью симметрично (часы равны минутам, например 23 : 23), он загадывает 1 желание. Если время частично симметрично (часы равны перевёрнутым минутам, например 23 : 32), он загадывает 3 желания. Сколько желаний максимум он может загадать за сутки?

Ответ: 69.

Решение. Сначала рассмотрим полностью симметричное время. В сутках 24 часа (от 00 до 23), и для каждого часа существует ровно одна такая минута: 00 : 00, 01 : 01, 02 : 02, ..., 23 : 23, значит Миша может загадать 24 желания. Теперь рассмотрим частично симметричное время. Перевёрнутых минут не существует только тогда, когда часы показывают 06-09 и 16-19 (перевёрнутые минуты 60, 70, ... и 61, ..., 71, ...). Значит всего моментов $24 - 4 \cdot 2 = 16$ и Миша может загадать $16 \cdot 3 = 48$ желаний. Заметим, что полностью симметричное время и частично симметричное время могут пересекаться: 00 : 00, 11 : 11, 22 : 22. Так как нужно найти максимум желаний, то в это время Миша будет загадывать 3 желания, то есть считать это время как частично симметричное. Посчитаем общее количество желаний: $(24 - 3) + 48 = 69$.

Задача 2-6. На доске выписано 2026-значное число. Каждое двузначное число, образованное соседними цифрами, делится на 17 или на 23. Последняя цифра числа 1. Какова первая?

Ответ: 3.

Решение. Выпишем все двузначные числа, делящиеся на 17 или 23. Это 17, 34, 51, 68, 85, 23, 46, 69, 92. У всех этих чисел последние цифры различны, значит, искомое число мы сможем восстановить однозначно. Последняя цифра 1, значит, соответствующее двузначное число — 51, т.е. предыдущая цифра в числе 5. Эта цифра 5 соответствует двузначному числу 85, следовательно, перед ней стоит цифра 8. Рассуждая аналогично, получим ряд из девяти последних цифр числа: 692346851. Набор 92346 будет теперь всё время повторяться. Всего же цифр 2026, поймём какая цифра стоит на 2026-м месте. Повтор начинается с 4-й цифры. 2023 сравнимо с 3 по модулю 5, а значит на 2026-м месте стоит 3-е число в последовательности. Это число 3.

Задача 3-3. В лесу 110 кормушек. В каждой из них лежит ненулевое число зёрен, все зёрна целые. Известно, что есть кормушки, в которых лежит по 1, 3, 5, ..., 99 (любое нечётное от 1 до 99) зёрен. Также известно, что для любой кормушки в пару ей найдётся такая, что вместе в них 101 зерно. Сколько максимально зёрен суммарно лежит во всех кормушках?

Ответ: 6050.

Решение. Так как есть кормушка с 1 зерном, в пару ей должна быть кормушка со 100 зёрнами; есть кормушка с 3 зёрнами, значит есть и с 98; есть с 5 — есть и с 96. Продолжая аналогичные рассуждения, получаем, что имеются кормушки с 100, 98, 96, ..., 2 зёрнами. Следовательно, имеются кормушки с 1, 2, 3, ..., 98, 99, 100 зёрнами. Так как требуется максимальное количество зёрен, в оставшихся 10 кормушках должно находиться 100 зёрен: больше 100 мы положить не сможем, так как тогда для неё не найдётся кормушки, чтобы вместе в них было 101 зерно. В пару же для кормушки со 100 зёрнами у нас уже точно есть кормушка с 1 зерном. Значит в лесу находились кормушки с 1, 2, 3, ..., 100 зёрнами и ещё 10 кормушек со 100 зёрнами. То есть всего: $1 + 2 + \dots + 99 + 100 + 10 \cdot 100 = 5050 + 1000 = 6050$.

Задача 3-4. В шеренге стоят 2026 человек, и одного из них зовут Артур. Каждый из стоящих в шеренге либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый, кроме Артура, сказал: «Между мной и Артуром стоят ровно два лжеца». Сколько лжецов может быть в этой шеренге, если известно, что Артур — рыцарь?

Ответ: 2, 3 или 4.

Решение. Те, кто стоят рядом с Артуром, и те, кто стоят через одного человека от него, заведомо врут, а значит они лжецы. Поэтому тот, между кем и Артуром стоят ровно два человека, — рыцарь. Перебирая по очереди каждого стоящего за этим рыцарем (удаляясь от Артура), убеждаемся, что все они — также рыцари. Заметим теперь, что количество людей, стоящих в шеренге рядом с Артуром и через одного человека от него, может быть различным. Их может быть: 1) двое, если Артур — крайний в шеренге; 2) трое, если Артур — второй с краю; 3) четверо во всех остальных случаях. Значит лжецов может быть 2, 3 или 4.

Задача 3-5. Вася поставил в ряд 6 гирек, при этом массы любых двух соседних гирек различаются на 1г. Известно, что среди них есть гирька массой 1г. Вася посчитал суммарную массу всего набора гирек. Какое число у него может получиться? (Укажите все варианты.)

Ответ: Все нечётные от 9 до 21.

Решение. Так как разница между соседними гирьками составляет 1 г, массы имеют разную чётность. В любой такой последовательности из 6 чисел ровно 3 чётных и 3 нечётных. Сумма трёх чётных (чётное) и трёх нечётных (нечётное) всегда нечётна, то есть у Васи могли получаться только нечётные числа. Наименьшее число, которое могло получиться: $1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 2 = 9$. Наибольшее число: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$. Примеры на все остальные нечётные числа от 9 до 21: 11 г: (1, 2, 3, 2, 1, 2); 13 г: (1, 2, 3, 2, 3, 2); 15 г: (1, 2, 3, 4, 3, 2); 17 г: (1, 2, 3, 4, 3, 4); 19 г: (1, 2, 3, 4, 5, 4).

Задача 3-6. Можно ли расставить по кругу шесть различных чисел так, чтобы каждое из них равнялось произведению двух соседних? Если да, то приведите пример.

Ответ: Да, например: 2, 6, 3, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$.

Задача 4-4. Сокомандники делят упаковку пончиков. Среди них нет жадных детей, поэтому они делят их поровну, но в таком случае остаётся один лишний пончик. А если ребята разделят поровну три такие же пачки, останется 13 лишних пончиков. Сколько

детей может быть в одной команде?

Ответ: 23.

Решение. Раздадим три раза по две пачки, останется $3 \cdot 1 = 3$ пончика. Но те же шесть упаковок можно раздать иначе — три и ещё три, и тогда останется $2 \cdot 13 = 26$ пончиков. Значит, $26 - 3 = 23$ пончика можно поделить между ребятами поровну. Поскольку число 23 простое, это возможно, только если детей в команде 23.

Задача 4-5. Шестиклассники становятся счастливыми, когда за день успевают поиграть в три разных игры. Какое наибольшее количество ребят можно осчастливить, имея доступ к 20 компьютерам с CS2, 30 с PUBG, 40 с FORTNITE и 50 с ROBLOX?

Ответ: 45.

Решение. Забудем пока об ROBLOX. Осталось $20 + 30 + 40 = 90$ компьютеров. Поскольку ребёнок может занять не более одного компьютера с ROBLOX, каждый ребёнок играет по крайней мере в две игры из 90. Значит, детей не более чем $90 : 2 = 45$. Покажем, как можно осчастливить 45 ребят: 5 детей играют в CS2, PUBG, ROBLOX; 15 шестиклассников играют в CS2, FORTNITE, ROBLOX; 25 ребят играют в FORTNITE, PUBG, ROBLOX. Всего 45 счастливых детей — и ещё осталось пять неиспользованных компьютеров с ROBLOX.

Задача 4-6. В однокруговом волейбольном турнире приняли участие 7 команд. За каждый выигрыш команда получает 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. По итогам турнира команды «ТЮМ» и «ПОБЕДА», занявшие первые два места, набрали по n очков. Причём оказалось, что нет такой команды, которая бы проиграла и «ТЮМ», и «ПОБЕДА». Какое наибольшее значение может принимать n ?

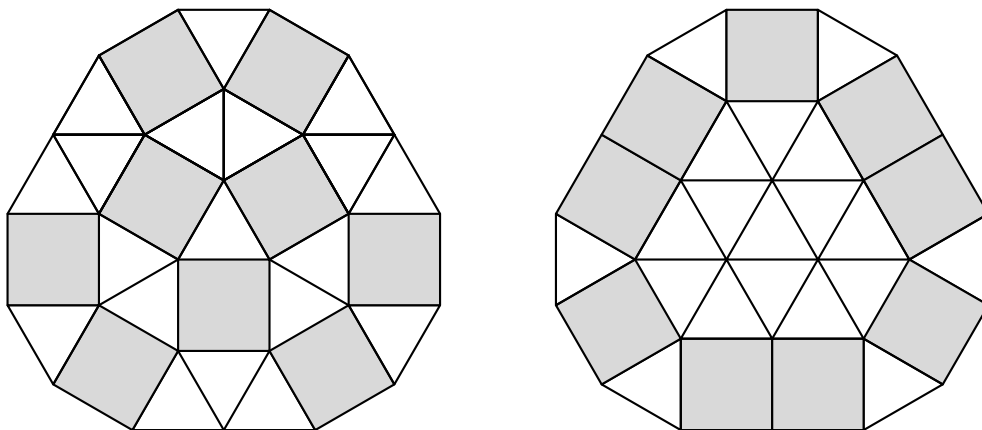
Ответ: 11.

Решение. Рассмотрим, сколько суммарно набрали очков команды «ТЮМ» и «ПОБЕДА»: любая оставшаяся команда не проиграла и «ТЮМу», и «ПОБЕДЕ», значит, суммарно они получили после матчей с ней до 4 очков (победа + ничья). Всего таких команд 5, значит суммарно максимум 20 очков. Также победители играли друг с другом, поэтому после этого матча к сумме их баллов прибавилось максимум 3. Итого вместе у них до 23 очков, у каждого по n , значит $n \leq 23/2$, $n \leq 11$, так как n — натуральное.

Задача 5-5. У Максима есть конструктор: 9 квадратов и 19 треугольников. Все стороны каждой фигуры равны 5 см. Можно ли сложить из всех этих 28 фигур плоский многоугольник, периметр которого равен 75 см? Если да, то приведите пример.

Ответ: Да, можно.

Решение.



Задача 5-6. Число $\frac{444!}{10^{222}}$ представили в виде несократимой дроби. Чему равен её знаменатель?

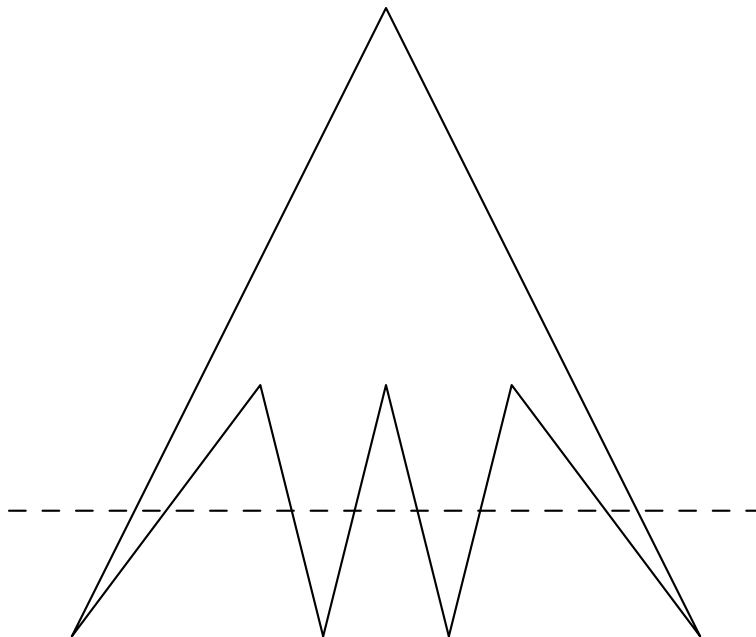
Ответ: 5^{114} .

Решение. Знаменатель — это $2^{222} \cdot 5^{222}$. Ясно, что в числителе двоек намного больше, значит они все сократятся. Осталось посчитать пятёрки в числителе. Каждое число, кратное 5, даёт хотя бы одну пятёрку, кратное 25 — две, 125 — три и т.д. Кратные 5 от 1 до 444: 5, 10, 15, ..., 445 (445 не входит), значит их $\lfloor 444/5 \rfloor = 88$. Из этих 88 чисел некоторые кратны 25 и дают дополнительную пятёрку: 25, 50, 75, ..., 425; их $\lfloor 444/25 \rfloor = 17$. Среди этих есть кратные 125: 125, 250, 375; их $\lfloor 444/125 \rfloor = 3$. Кратных 625 уже нет ($444 < 625$). Итого число пятёрок в $444!$: 88 (от кратных 5) $+17$ (доп. пятёрки от кратных 25) $+3$ (от кратных 125) $= 108$. То есть в $444!$ ровно 108 множителей 5. Значит в знаменателе останется $5^{222-108} = 5^{114}$.

Задача 6-6. Найдите все натуральные числа $n > 2$, для которых существует n -угольник, такой что через него можно провести прямую, пересекающую все его стороны в точках, не являющихся вершинами.

Ответ: При чётных n .

Решение. Докажем, что при нечётных n такого n -угольника не существует. Будем двигаться вдоль прямой в одном направлении. При каждом пересечении границы многоугольника мы переходим снаружи многоугольника внутрь или изнутри наружу. Поскольку оба «конца» прямой находятся снаружи многоугольника, мы пересечём границу чётное число раз. Значит, мы не можем пересечь все стороны (их нечётное число, а дважды одну сторону пересечь нельзя). Теперь приведём пример n -угольника с чётными сторонами:



§4.3.2 Пенальти

Задача 1. В саду 150 сорняков. Каждый день бабушка убирает 15 сорняков. Если в саду остаётся хотя бы один сорняк, то ночью вырастает ещё 10. Сколько дней потребуется бабушке, чтобы убрать все сорняки в саду?

Ответ: 28 дней.

Решение. Согласно условию, пока в саду есть сорняки, за полные сутки количество сорняков уменьшается на $15 - 10 = 5$ сорняков. Бабушка закончит работу в тот день, когда утром останется 15 сорняков, убрав их всех разом. Тогда ей нужно убрать $150 - 15 = 135$ сорняков, за $135/5 = 27$ дней. Утром на 28-й день в саду остаётся ровно 15 сорняков, которые бабушка уберёт в течение этого дня.

Задача 2. Школьник делает своё домашнее задание. Выполнив половину заданий, он делает 15-минутный перерыв. После перерыва ученик решает на 75% медленнее, чем до перерыва. Оказалось, что время от начала работы до окончания перерыва равно времени, которое он потратил на решение после перерыва. Сколько времени школьник потратил в общей сложности, включая перерыв?

Ответ: 40 минут.

Решение. После перерыва скорость упала на 75%, то есть составила 25% от первоначальной. Значит, на вторую половину работы ему потребовалось в 4 раза больше времени, чем на первую. Если на половину задания ушло x минут, то на вторую $4x$. Тогда по условию: $x + 15 = 4x$, значит $x = 5$. Значит всего времени потребовалось: $x + 15 + 4x = 5 + 15 + 4 \cdot 5 = 40$ минут.

Задача 3. На доске написаны две различные ненулевые цифры. Таня просуммировала всевозможные трёхзначные числа, используя только эти две цифры, и получила 1776. Найдите две цифры, которые были написаны на доске.

Ответ: 1 и 3.

Решение. Пусть на доске написаны a и b . Используя только их, можно составить всего 8 различных трёхзначных чисел: aaa , aab , aba , abb , baa , bab , bba , bbb . Заметим, что в каждом разряде каждая из цифр a и b встречается ровно по 4 раза. Тогда сумма цифр в каждом разряде равна $4a + 4b = 4(a + b)$. Тогда общая сумма всех восьми чисел равна $100 \cdot 4(a + b) + 10 \cdot 4(a + b) + 4(a + b) = 444(a + b)$. По условию она равна 1776, откуда $a + b = 4$. Так как a и b различны, то это цифры 1 и 3.

Задача 4. Известно, что 1-е января 2026 года — четверг. Каким днём недели было 29 мая 2003 года?

Ответ: четверг.

Решение. $365 = 7 \cdot 52 + 1$. 29 мая 2026 года — пятница. За один год день недели смещается на один, то есть, если 29 мая 2026 года — пятница, то 29 мая 2025 — четверг. Всего с 2003 по 2026 23 года, причём 6 из них високосные, поэтому сдвиг в них проходит на 2 дня недели. Всего сдвигов будет $23 + (23 - 6) = 29$. $29 = 7 \cdot 4 + 1$, поэтому 29 мая 2003 года — четверг.

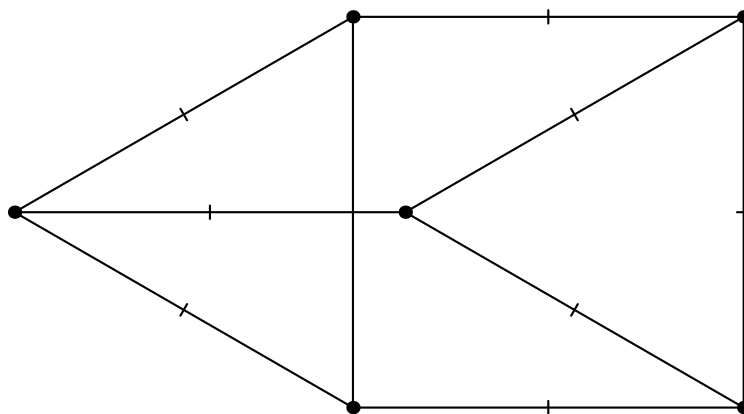
Задача 5. После утренней пробежки Карлсон худеет на 1 килограмм, а к вечеру (после поедания плюшек) его вес увеличивается на треть. К вечеру третьего дня Карлсон обнаружил, что поправился вдвое. Сколько он весил до того, как начал заниматься спортом?

Ответ: 14,8 кг.

Решение. Пусть перед первой пробежкой Карлсон весил x кг, тогда после неё он весил $x - 1$ кг, а к концу дня $\frac{4}{3}(x - 1)$ кг. После второй пробежки он весил $\frac{4}{3}(x - 1) - 1 = \frac{4x}{3} - \frac{7}{3}$ кг, а к концу второго дня $\frac{4}{3}(\frac{4x}{3} - \frac{7}{3}) = \frac{16x}{9} - \frac{28}{9}$ кг. Аналогично к концу третьего дня Карлсон весил $\frac{4}{3}(\frac{16x}{9} - \frac{37}{9})$ кг, что по условию равно $2x$ кг. Отсюда $64x - 148 = 54x$, то есть $x = 14,8$.

Задача 6. Отметьте, пожалуйста, на плоскости 6 точек так, чтобы от каждой из них на расстоянии 1 находилось ровно три точки.

Решение.



Задача 7. На острове есть 2 типа жителей: рыцари, которые говорят правду, и лжецы, которые всегда врут. Как-то раз 12 жителей острова встали в ряд. Шестеро из них сказали: «Справа от меня в ряду есть рыцарь», а шестеро других: «Слева от меня в ряду есть лжец». Какое наибольшее количество лжецов может быть среди них? Вместе с ответом приведите пример расстановки рыцарей и лжецов.

Ответ: 7.

Решение. Рассмотрим тех шестерых жителей, которые сказали фразу: «Слева от меня в ряду есть лжец». Если эту фразу произносит лжец, то он лжёт, а значит, слева от него лжецов нет. Следовательно, он является самым левым жителем среди них, а остальные пятеро обязаны быть рыцарями. Так как в ряду гарантированно есть как минимум 5 рыцарей, лжецов не может быть больше 7.

Пример: Л Р Р Р Р Р Л Л Л Л Л Л, первые шесть говорят фразу «Слева от меня в ряду есть лжец», остальные — «Справа от меня в ряду есть рыцарь».

Задача 8. Каждая клетка доски 8×8 окрашена в один из трёх цветов: красный, синий или зелёный. В каждой строке не больше 3 красных клеток. В каждом столбце не больше 3 синих клеток. Найдите наименьшее возможное количество зелёных клеток и приведите пример раскраски.

Ответ: 16 клеток.

Решение. Всего в таблице 8 строк, значит красных клеток не больше $8 \cdot 3 = 24$. Аналогично синих клеток не больше $8 \cdot 3 = 24$, так как всего 8 столбцов. Значит, зелёных клеток не меньше, чем $64 - 24 - 24 = 16$.

Пример раскраски:

К	К	К	С	С	С	З	З
З	К	К	К	С	С	С	З
З	З	К	К	С	С	С	С
С	З	З	К	К	К	С	С
С	С	З	З	К	К	К	С
С	С	С	З	З	К	К	К
К	С	С	С	З	З	К	К
К	К	С	С	С	З	З	К

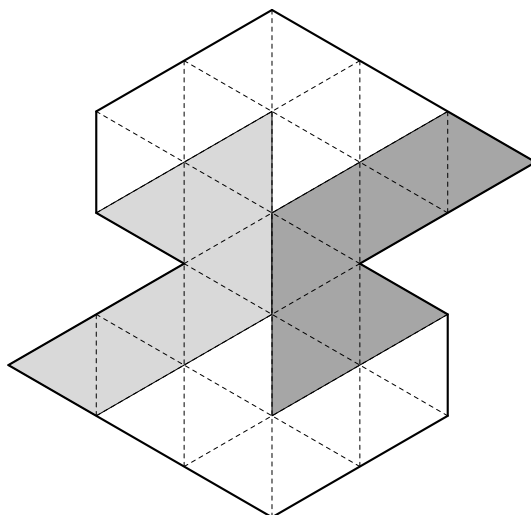
Задача 9. В СРБ-Тауэр расположены 20 высоток. Лёша и Миша (два брата) хотят купить по квартире в СРБ-Тауэр. Миша хочет, чтобы этаж, на котором будет располагаться его квартира, равнялся номеру квартиры его брата. А Лёша желает, чтобы сумма номеров квартир равнялась 1239. Известно, что на каждом этаже по 10 квартир. Помогите им определить номера квартир и этажей, чтобы удовлетворить их предпочтения.

Ответ: 113 квартира, 12 этаж; 113 этаж, 1126 квартира.

Решение. Пусть у Лёши квартира с номером N . Тогда Миша хочет жить на N -м этаже, значит Миша выберет жильё с номером вида $10N - k$, где k — остаток при делении на 10. Лёша желает, чтобы сумма номеров квартир была равна 1239, значит $N + (10N - k) = 11N - k = 1239$. Мы знаем, что k — остаток при делении на 10, то есть $0 \leq k \leq 9$, откуда $1239 \leq 11N \leq 1248$. $11N$ также делится на 11, а на заданном промежутке такое число только одно, поэтому $11N = 1243$, то есть $N = 113$, $k = 4$. Итого Лёша будет жить в 113-й квартире на 12-м этаже, а Миша выберет 1126-ю квартиру на 113-м этаже.

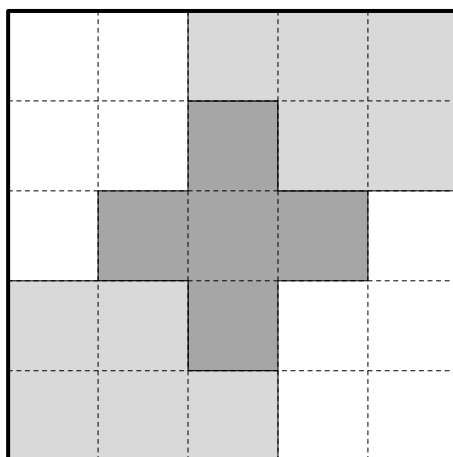
Задача 10. Разрежьте данную фигуру на 4 равные части.

Решение.



Задача 11. На клетчатой бумаге нарисован квадрат со стороной 5 клеток. Разрежьте его по линиям сетки на 5 частей одинаковой площади так, чтобы суммарная длина проведённых разрезов не превосходила 16 клеток.

Решение.



Задача 12. Полтора землекопа выкопали полторы ямы за полтора часа. Сколько ям выкопают два землекопа за два часа?

Ответ: $2\frac{2}{3}$ ямы.

Решение. Один землекоп за полтора часа выкопает $\frac{3}{2} : \frac{3}{2} = 1$ яму. Тогда один землекоп за один час выкопает $1 : \frac{3}{2} = \frac{2}{3}$ ямы. Два землекопа за два часа выкопают $\frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 2 = 2\frac{2}{3}$ ямы.

Задача 13. Чтобы спасти принцессу, рыцарь должен успеть добраться до замка за 2 часа. Сначала он скакал 20 километров на коне со скоростью 24 км/ч, потом плыл 3 километра по озеру со скоростью 4 км/ч, потом бежал 6 километров. С какой наименьшей скоростью рыцарь должен был бежать, чтобы успеть спасти принцессу?

Ответ: 14,4 км/ч.

Решение. На первые 20 километров рыцарь затратил $20/24 = 5/6$ часа. Следующие 3 километра он проплыл за $3/4$ часа. Осталось $2 - 5/6 - 3/4 = 5/12$ часа. Скорость на последнем этапе должна быть не меньше $6 : 5/12 = 6 \cdot 12/5 = 14,4$ км/ч.

Задача 14. Шнур длиной 3 м состоит из нескольких зелёных и нескольких красных участков. Зелёный участок горит со скоростью 3 см/сек, а красный — со скоростью 2 см/сек. Когда шнур подожгли одновременно с двух концов, он сгорел за 59 секунд. Какова суммарная длина красных участков шнура?

Ответ: 108 см.

Решение. Заметим, что если шнур поджечь с одного конца, он будет гореть вдвое дольше, чем подожжённый с двух концов, то есть 118 секунд. Пусть общая длина красных участков — x см. Тогда общая длина зелёных — $300 - x$ см, и верёвка, подожжённая с одного конца, будет гореть $x/2 + (300 - x)/3$ секунд. Решая уравнение $x/2 + (300 - x)/3 = 118$, находим $x = 108$ см.

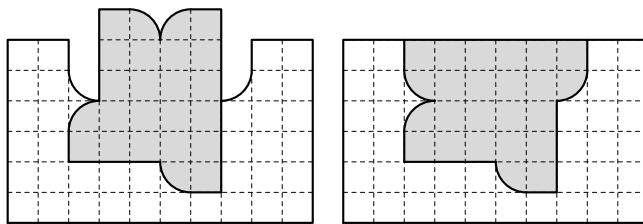
Задача 15. Даны две параллельные прямые. На первой прямой находится 6 точек, на второй 5 точек. Найдите количество треугольников, вершины которых располагаются в этих точках (прямые называются параллельными, если они не пересекаются).

Ответ: 135 треугольников.

Решение. Пусть «первая» прямая — та, где 6 точек, «вторая» — где 5. Так как на одной прямой не может лежать 3 вершины треугольника, то на каждой из прямых лежит либо 1, либо 2 вершины. Всего 6 способов выбрать 1 вершину на первой прямой, и $\binom{5}{2} = 10$ способов выбрать 2 вершины на второй прямой без учёта порядка. Значит, треугольников с 1 вершиной на первой прямой всего $6 \cdot 10 = 60$. Аналогично 5 способов выбрать 1 вершину на второй прямой, и $\binom{6}{2} = 15$ способов выбрать 2 вершины на первой прямой без учёта порядка. Значит, треугольников с 2 вершинами на первой прямой всего $5 \cdot 15 = 75$. Тогда всевозможных треугольников всего $60 + 75 = 135$.

Задача 16. Разрежьте данную фигуру на две части и сложите из них прямоугольник (можно резать не только по линиям сетки).

Решение.



§4.4 7 класс

§4.4.1 Домино

Задача 0-0. В квадрате 45×45 в чёрный цвет закрашены 2022 клетки. Каково наибольшее n , при котором в любой такой раскраске найдётся целый чёрный квадрат $n \times n$?

Ответ: 22.

Решение. Разобьём квадрат 45×45 на 4 угловых квадрата 22×22 . Всего незакрашенных клеток $45^2 - 2022 = 2025 - 2022 = 3 < 4$. По принципу Дирихле среди четырёх квадратов найдётся хотя бы один, не содержащий ни одной незакрашенной клетки, то есть целиком чёрный. Следовательно, при $n = 22$ условие выполняется.

Покажем, что для $n = 23$ утверждение уже неверно. Достаточно оставить незакрашенной только центральную клетку. Любой квадрат 23×23 в доске 45×45 обязательно содержит эту клетку (поскольку его размер больше половины стороны, он покрывает центр), а значит, не может быть целиком чёрным. Таким образом, наибольшее возможное n равно 22.

Комментарий. В данном случае использовалась следующая формулировка принципа Дирихле: если в четырёх ящиках лежат три предмета, то хотя бы один ящик пуст. Иными словами, среди четырёх квадратов 22×22 найдётся хотя бы один, не содержащий ни одной из трёх незакрашенных клеток, то есть полностью чёрный.

Задача 0-1. Какой цифрой заканчивается число $1! + 2! + 3! + \dots + 2026!$ (где $n!$ — произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно)?

Ответ: 3.

Решение. Легко видеть, что слагаемые, начиная с $5!$, кратны 10, а значит, не влияют на последнюю цифру суммы. Поэтому достаточно вычислить последнюю цифру суммы первых четырёх слагаемых:

$$1! + 2! + 3! + 4! = 1 + 2 + 6 + 24 = 33,$$

то есть последняя цифра равна 3.

Задача 0-2. В треугольнике ABC выполнено условие $AB = 2BC$. Из точки B треугольника ABC провели высоту BH , а после удвоили и получили точку D . Найдите длину отрезка AB , если периметр четырёхугольника $ABCD$ равен 24.

Ответ: 8.

Решение. Треугольник ACD симметричен треугольнику ABC относительно прямой BC (поскольку D симметрична B относительно BC). Следовательно, периметр четырёхугольника $ABCD$ равен $2(AB + BC) = 6BC = 24$, откуда $BC = 4$ и $AB = 2BC = 8$.

Задача 0-3. У русского фермера есть 5 медведей, 4 волка и 7 зайцев. Сколькими способами он может разбить их на пары так, чтобы в каждой паре были животные разных видов? (Все звери считаются различными.)

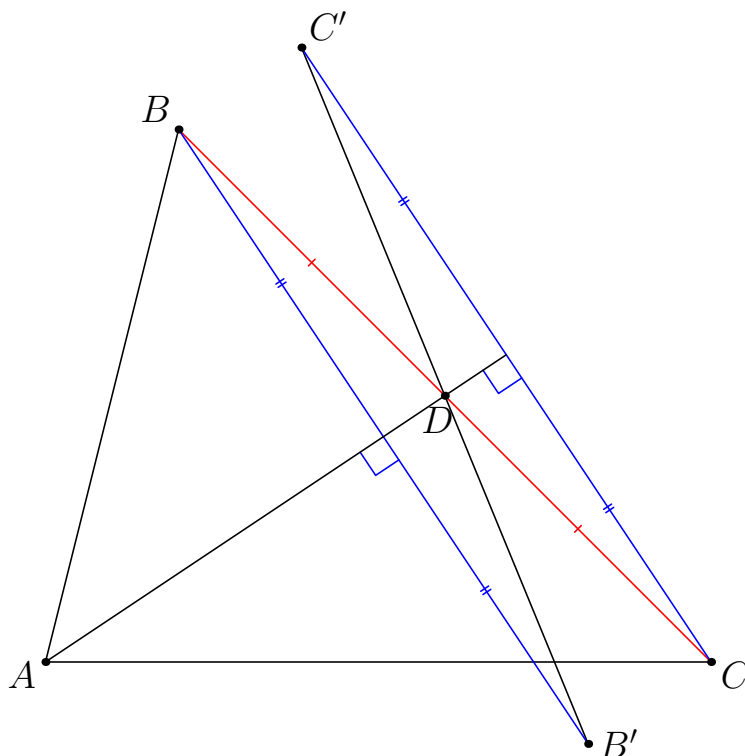
Ответ: 100800.

Решение. Нужно разбить на пары $5 + 4 = 9$ медведей и волков, а также 7 зайцев. Поскольку зайцев меньше, ровно одна пара будет состоять из медведя и волка, а остальные 7 пар — из зайца с кем-то из оставшихся медведей или волков. Пару медведь-волк можно выбрать $5 \cdot 4$ способами. После этого оставшимся 7 зайцам нужно сопоставить 7 оставшихся не-зайцев, что можно сделать $7!$ способами. Итого получаем $5 \cdot 4 \cdot 7! = 100800$.

Задача 0-4. Дан треугольник ABC , в котором $AB = 18$, $AC = 20$, $BC = 24$ и точка D на стороне BC . Точки B и C отражаются относительно прямой AD в точки B' и C' соответственно. Известно, что прямые BC' и $B'C$ не пересекаются. Найдите BD .

Ответ: 12.

Решение. Длины AB и AC не имеют значения. Поскольку фигура симметрична относительно прямой AD , прямые BC' и $B'C$ пересекаются тогда и только тогда, когда они пересекаются в точке на AD . Следовательно, если они никогда не пересекаются, то они параллельны AD . Тогда $BC'CB'$ — прямоугольник (так как BB' и CC' перпендикулярны AD), в котором диагонали делятся точкой пересечения D пополам. Действительно, BC пересекает AD в точке D , а $B'C'$ симметрично BC относительно AD , причём AD является серединным перпендикуляром к BB' и CC' . Следовательно, $BD = \frac{1}{2}BC = 12$.



Задача 0-5. Найдите наименьшее нечётное число $n > 9$ такое, что разность между произведением его цифр и суммой его цифр является составным числом (то есть имеет более двух различных натуральных делителей).

Ответ: 39.

Решение. Предположим, что искомое число двузначное. Пусть $n = \overline{ab}$, тогда $ab - (a + b)$ должно быть составным. Преобразуем: $ab - a - b = (a - 1)(b - 1) - 1$. Перебираем возможные значения a и b ($a \geq 1$, b нечётное). При $a = 1$ выражение равно -1 , что не является составным. При $a = 2$ получаем $b - 2$, однако перебор показывает, что подходящих значений нет. При $a = 3$ имеем $2(b - 1) - 1 = 2b - 3$. Перебирая нечётные b , находим, что наименьшее подходящее число получается при $b = 9$: $3 \cdot 9 - (3 + 9) = 27 - 12 = 15$, а 15 — составное. Таким образом, $n = 39$ удовлетворяет условию и является наименьшим.

Задача 0-6. Пусть a и b — рациональные числа, которые в несократимом виде имеют знаменатели 60 и 70 соответственно. Чему равен наименьший возможный знаменатель суммы $a + b$?

Ответ: 84.

Решение. Запишем

$$a + b = \frac{a}{60} + \frac{b}{70} = \frac{7a + 6b}{420}.$$

Так как a взаимно просто с 60, а b взаимно просто с 70, то ни одно из простых чисел 2, 3, 7 не может делить $7a + 6b$, поэтому сократить эти множители в знаменателе не удастся. Следовательно, после приведения к несократимому виду знаменатель будет не меньше $2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$ (произведение степеней 2, 3 и 7, входящих в 420). С другой стороны, значение 84 достигается, например, при

$$\frac{1}{60} + \frac{3}{70} = \frac{25}{420} = \frac{5}{84}.$$

Таким образом, ответ равен 84.

Задача 1-1. В школе проводят турнир по настольному теннису. В финал вышли 8 игроков. Каждый участник должен сыграть с каждым из остальных ровно один раз. Партия длится 15 минут, и в школе есть только два стола. Какое наименьшее количество часов потребуется для проведения всех партий финала?

Ответ: 3,5.

Решение. Всего нужно провести $(8 \cdot 7)/2 = 28$ партий, причём за 15 минут можно сыграть не более 2 партий. Значит, потребуется не менее $(28/2) \cdot 15 = 210$ минут, что составляет $210/60 = 3,5$ часа.

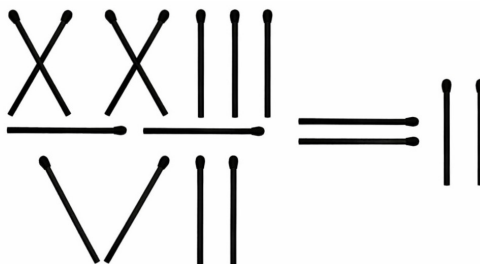
Задача 1-2. Решите в целых числах:

$$2x + 6y = xy - 1.$$

Ответ: $(19, 3)$, $(7, 15)$, $(-7, 1)$, $(5, -11)$.

Решение. Перенесём $2x + 6y$ в правую часть и добавим 13, получим $13 = xy + 12 - 2x - 6y$. Обратим внимание, что правая часть раскладывается на множители: $xy + 12 - 2x - 6y = (x - 6)(y - 2)$. Таким образом, $13 = (x - 6)(y - 2)$. Так как $x, y \in \mathbb{Z}$, то $x - 6$ и $y - 2$ — целые числа. Число 13 простое, поэтому возможны варианты: $x - 6 = \pm 1$, $y - 2 = \pm 13$; $x - 6 = \pm 13$, $y - 2 = \pm 1$. Отсюда находим пары (x, y) : $(19, 3)$, $(7, 15)$, $(-7, 1)$, $(5, -11)$.

Задача 1-3. Переложите одну спичку так, чтобы правая и левая части равенства отличались меньше, чем на 0,1.



Первое решение. Переложим крайнюю правую спичку в числителе так, чтобы в правой части образовалось число π . Тогда слева получим $22/7 \approx 3,14$, а справа $\pi \approx 3,14$, что удовлетворяет условию.

Второе решение. Переложим в знаменателе одну спичку так, чтобы римская цифра V превратилась в X. Тогда левая часть станет $23/12 \approx 1,92$, а правая часть равна 2. Разница составляет примерно 0,08, что меньше 0,1.

Задача 1-4. Какая последняя цифра у числа $20262027^{20262027}$?

Ответ: 3.

Решение. Понятно, что последняя цифра данного числа совпадает с последней цифрой числа $7^{20262027}$. Последняя цифра степени семёрки повторяется с периодом 4: 7, 9, 3, 1. Поэтому нужно найти остаток от деления на 4 показателя 20262027. Для этого достаточно рассмотреть остаток от деления на 4 числа, образованного последними двумя цифрами, то есть 27: $27 = 4 \cdot 6 + 3$, остаток равен 3. Следовательно, показатель степени даёт остаток 3 при делении на 4, а значит, последняя цифра равна 3.

Задача 1-5. Найдите сумму цифр числа $\underbrace{999 \dots 99^3}_{2026}$.

Ответ: 36468.

Решение. Обратим внимание, что $999 \dots 999^3 = (10^{2026} - 1)^3$. Раскроем скобки по формуле куба разности, получим: $10^{6078} - 3 \cdot 10^{4052} + 3 \cdot 10^{2026} - 1$. Поочерёдно выполним операции. После первой получим, что на 4052-м месте стоит 7, а до него — 2025 цифр 9. После второй получим, что на 2026-м месте стоит 3. Затем вычитаем 1. В итоге число состоит из $2026 + 2025$ девяток, затем одной 7, затем одной 2 и 2025 нулей. Сумма этих цифр равна 36468.

$$\begin{aligned}\underbrace{999 \dots 99^3}_{2026} &= (\underbrace{100 \dots 00}_{2026} - 1)^3 \\ &= \underbrace{100 \dots 00}_{6078} - 3 \underbrace{00 \dots 00}_{4052} + 3 \underbrace{00 \dots 00}_{2026} - 1 \\ &= \underbrace{99 \dots 99}_{2025} 7 \underbrace{00 \dots 00}_{2025} 2 \underbrace{99 \dots 99}_{2026}.\end{aligned}$$

Задача 1-6. В выражение

$$\frac{2^{\square} + 2^{\square} + 2^{\square}}{2^{\square} + 2^{\square} + 2^{\square}}$$

в каждое поле $\square$ нужно вписать одно из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 (все числа различные). Среди всех возможных значений данной дроби найдите наиболее близкое к 1.

Ответ: 0,8.

Решение. Будем разбивать числа на две тройки. В одной из троек обязательно окажется число 64. Рассмотрим эту тройку. Наименьшая возможная сумма в ней — $64 + 2 + 4 = 70$. Если увеличивать эту сумму, то будет расти и разность между числителем и знаменателем дроби, а нам нужно, чтобы дробь была как можно ближе к 1. Если одна тройка содержит 64, 2 и 4, то вторая содержит 8, 16 и 32, и её сумма равна $8 + 16 + 32 = 56$. Тогда возможные значения дроби: $70/56 = 5/4 = 1,25$ или $56/70 = 4/5 = 0,8$. Из них ближе к 1 находится 0,8.

Задача 2-2. Из реки на берег выходят 5 раков. Среди них есть «зачётные» раки (одна клешня большая, другая маленькая), «незачётные» раки (обе клешни маленькие) и один «трофейный» рак — Рачий Царь (обе клешни большие). Они встают в круг и берутся за клешни своих двух соседей. Оказалось, что все «ракопожатия» происходят между большой и маленькой клешнёй. Сколько существует упорядоченных расстановок раков, которые могут так встать в круг?

Ответ: 20.

Решение. Рассмотрим соседей Рачьего Царя. Если оба соседа «зачётные», то хотя бы у одного из них есть «незачётный» сосед (иначе их соседи образовали бы ещё одного

Рачьего Царя, а он по условию единственный). Тогда пятый рак определяется однозначно, а выбрать, какой из соседей имеет «незачётного» соседа, можно двумя способами. Если оба соседа «незачётные», то помимо Рачьего Царя их соседями также должны быть «незачётные» раки, что привело бы к появлению второго Рачьего Царя — противоречие. Если один сосед «незачётный», а другой «зачётный», то сосед «незачётного» — «зачётный», а сосед «зачётного» — «незачётный» (иначе у «зачётного» появился бы «зачётный» сосед, и образовался бы второй Рачий Царь). Пятый рак при этом определяется однозначно. Поскольку «зачётного» соседа у Рачьего Царя можно выбрать двумя способами, этот случай даёт ещё 2 способа. Итого получаем $2 + 2 = 4$ расстановок относительно «трофейного» рака. Всего есть 5 способов расставить Рачьего Царя, значит, существует ровно $4 \cdot 5 = 20$ расстановок.

Задача 2-3. Найдите сумму обратных величин всех натуральных делителей числа 144.

Ответ: $\frac{403}{144}$.

Решение. Когда d пробегает все делители числа 144, то же самое делает и $144/d$, поэтому сумма $\sum \frac{1}{d}$ равна $\frac{1}{144}$ от суммы делителей числа 144. Используя формулу для суммы делителей (или просто перебирая их вручную), получаем, что эта сумма равна 403, следовательно, ответ равен $\frac{403}{144}$.

Задача 2-4. Попарно различные числа a, b, c таковы, что

$$a^3 - 7a = b^3 - 7b = c^3 - 7c.$$

Вычислите значение выражения $a + b + c$.

Ответ: 0.

Решение. Из данных условий следует, что $a^3 - b^3 = 7(a - b)$, откуда $a^2 + ab + b^2 = 7$ (поскольку $a \neq b$). Аналогично получаем $b^2 + bc + c^2 = 7$. Вычитая из первого равенства второе, имеем

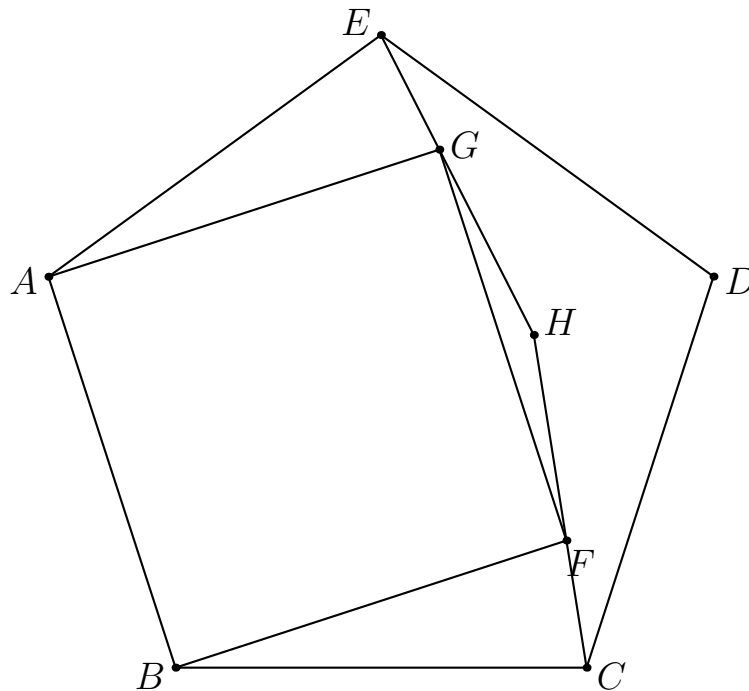
$$(a^2 + ab + b^2) - (b^2 + bc + c^2) = a^2 + ab - bc - c^2 = (a - c)(a + b + c) = 7 - 7 = 0.$$

Так как a, b, c различны, то $a \neq c$, следовательно, $a + b + c = 0$.

Задача 2-5. На стороне AB правильного пятиугольника $ABCDE$ во внутреннюю сторону построен квадрат $ABFG$. Найдите угол между прямыми EG и CF .

Ответ: 18° .

Решение. Поскольку $BF = AB = BC$, треугольник BCF равнобедренный, поэтому $\angle BFC = \angle BCF$. Угол $CBF = 108^\circ - 90^\circ = 18^\circ$ (углы правильного пятиугольника равны 108°). Пусть EG и CF пересекаются в H . Тогда $\angle BFC = (180^\circ - 18^\circ)/2 = 81^\circ$, откуда $\angle BFH = 180^\circ - 81^\circ = 99^\circ$. Угол $GFH = 99^\circ - 90^\circ = 9^\circ$. Аналогично $\angle FGH = 9^\circ$. Следовательно, $\angle GHF = 180^\circ - 9^\circ - 9^\circ = 162^\circ$. Угол между прямыми — это наименьший из вертикальных углов, поэтому искомый угол равен $180^\circ - 162^\circ = 18^\circ$.



Задача 2-6. Палиндром — это натуральное число, которое читается одинаково слева направо и справа налево, например, 72327. Каков наименьший пятизначный палиндром, кратный 99?

Ответ: 54945.

Решение. Запишем число в виде $\overline{abcba}$. Оно равно

$$10000a + 1000b + 100c + 10b + a = 99(101a + 10b + c) + 20b + 2a + c.$$

Нам нужно, чтобы выражение $20b + 2a + c$ делилось на 99, причём a должно быть как можно меньше. Это выражение не превышает $20 \cdot 9 + 2 \cdot 9 + 9 = 207$ и больше 0 (так как $a \neq 0$). Поэтому оно может равняться 99 или 198. Рассмотрим оба случая.

Для 198 нужно $b = 9$, тогда $2a + c = 18$. Наименьшее возможное a равно 5, при этом $c = 8$, и получаем число 59895.

Для 99 нужно $b = 4$, тогда $2a + c = 19$. Как и выше, наименьшее a равно 5, а $c = 9$. Получаем число 54945. Оно меньше предыдущего, следовательно, это наименьшее число, удовлетворяющее условию задачи.

Задача 3-3. В области 10 городов, и некоторые пары городов соединены дорогами. Всего дорог — 40. Город называется «цитаделью», если он соединён напрямую с каждым другим городом. Каково наибольшее возможное количество «цитаделей»?

Ответ: 6.

Решение. Если есть c цитаделей, то C_c^2 дорог соединяют цитадели между собой, и каждая цитадель соединена с остальными $(10 - c)$ городами; таким образом, получаем $C_c^2 + c(10 - c)$ различных дорог. Следовательно,

$$40 \geq C_c^2 + c(10 - c) = -\frac{c^2}{2} + \frac{19c}{2},$$

то есть $80 \geq c(19 - c)$. Наибольшее $c \leq 10$, удовлетворяющее этому условию, равно $c = 6$. Обратно, если соединить каждые два из шести городов (цитадели) друг с другом и добавить оставшуюся $40 - (C_6^2 + 6(10 - 6)) = 1$ дорогу куда угодно, то получим 6 цитаделей. Таким образом, ответ равен 6.

Задача 3-4. Представьте число $\left(\frac{17^2 + 19^2}{2}\right)^2$ в виде суммы двух квадратов натуральных чисел.

Ответ: $323^2 + 36^2$.

Решение. Пусть $a = 18$, тогда исходное выражение преобразуется в

$$\left(\frac{(a-1)^2 + (a+1)^2}{2}\right)^2.$$

Раскрывая скобки, получаем $(a^2+1)^2$. Легко видеть, что это выражение равно $(a^2-1)^2 + (2a)^2$. Подставляя $a = 18$, находим сумму $323^2 + 36^2$.

Задача 3-5. Факториалом натурального числа n называют произведение $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$, полагая $0! = 1$. Сколько натуральных чисел, не превосходящих 448, можно представить как сумму различных факториалов? (Считайте $0!$ и $1!$ различными.)

Ответ: 39.

Решение. Обратим внимание, что $1 = 0!$, $2 = 0! + 1!$, $3 = 0! + 2!$, $4 = 0! + 1! + 2!$. Это единственные числа, меньшие 6, которые можно представить в виде суммы факториалов. Остальные факториалы, не превосходящие 448, — это $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$. Факториал $6! = 720$ уже больше 448, поэтому не рассматривается. Следовательно, натуральное число, не превосходящее 448, может включать в свою сумму факториалы $3!$, $4!$, $5!$ и/или одно из чисел $1, 2, 3, 4$ (соответствующих комбинациям $0!$ и $1!$). Если в сумме есть $6!$ или больший факториал, число превысит 448. Таким образом, каждое представление определяется выбором: включать ли $3!$ (2 варианта), $4!$ (2 варианта), $5!$ (2 варианта), а также добавлением одного из чисел $0, 1, 2, 3, 4$ (5 вариантов). Это даёт $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 40$ чисел, не превосходящих 448 (включая ноль). Исключая ноль, получаем 39 положительных чисел.

Задача 3-6. Каждой букве в слове ТЮМЕНЬ взаимно однозначно соответствует значение из набора чисел $\{1, 1, 2, 3, 5, 8\}$. Найдите все решения уравнения

$$\frac{(T + Ю + М + Е + Н + Ь)^2}{T - Ю + М + Е + Н + Ь} = T^{ЮМ^{ЕН^Ь}}.$$

Ответ: $T = 5$, $Ю = 2$, $М = 1$, а $Е$, $Н$ и $Ь$ — перестановки $\{1, 3, 8\}$.

Решение. Легко видеть, что $T + Ю + М + Е + Н + Ь = 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 = 20$. Следовательно, $T - Ю + М + Е + Н + Ь = 20 - 2Ю \neq (T + Ю + М + Е + Н + Ь)^2$. Так как $20^2 = 2^4 \cdot 5^2$, то либо T — степень двойки, либо $T = 5$. Если T — степень двойки, то $20 - 2Ю$ должно делиться 5^2 , чтобы значение дроби было степенью двойки. Но этого не может быть, так как $20 - 2Ю < 5^2 = 25$, противоречие. Значит, $T = 5$. Из предыдущих рассуждений ясно, что $Ю \leq 2$. Если $Ю = 1$, то $20 - 2Ю$ должно быть кратно $2^4 \cdot 5 = 80 > 20 - 2Ю$, противоречие. Следовательно, $Ю = 2$, а также $М = 1$ (иначе показатель степени пятёрки будет больше 2). Осталось убедиться, что итоговый ответ не зависит от $Е$, $Н$ и $Ь$, так что можно взять все их перестановки.

Задача 4-4. В квадрате 3×3 расставляют числа $1, 2, \dots, 9$ так, что в каждой строке числа возрастают слева направо, а в левом столбце убывают сверху вниз. Сколько существует таких расстановок?

Ответ: 280.

Решение. Количество способов выбрать 3 тройки чисел из 9 равно

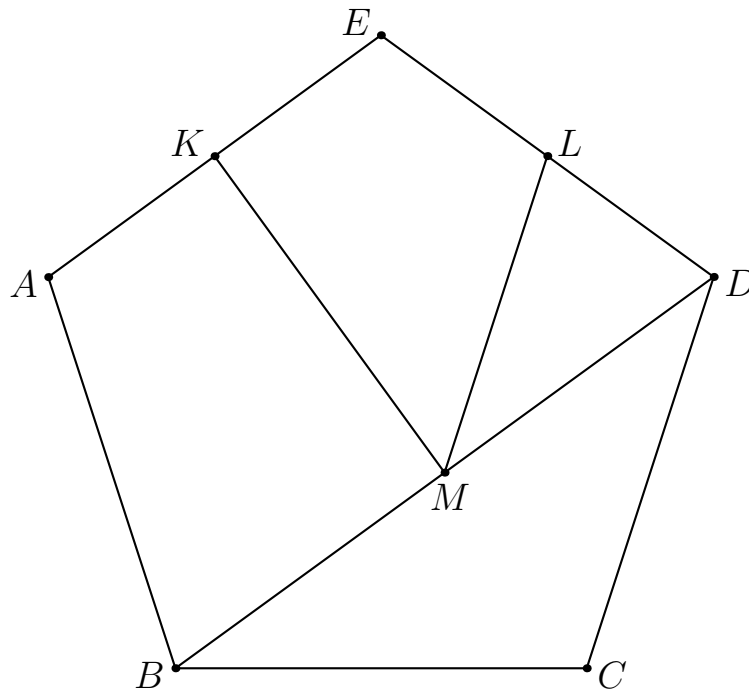
$$\frac{C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3}{3!} = \frac{84 \cdot 20 \cdot 1}{6} = 280$$

(сначала выбираем 3 числа из 9, затем 3 из оставшихся 6, затем 3 из последних 3, после чего делим на $3!$, чтобы учесть перестановки троек). Это и есть ответ, поскольку после выбора троек мы можем однозначно расставить их так, чтобы выполнялось условие: сначала упорядочиваем тройки по возрастанию, а затем упорядочиваем строки.

Задача 4-5. В правильном пятиугольнике $ABCDE$ точки K, L, M — середины отрезков AE, DE, BD соответственно. Найдите угол KML .

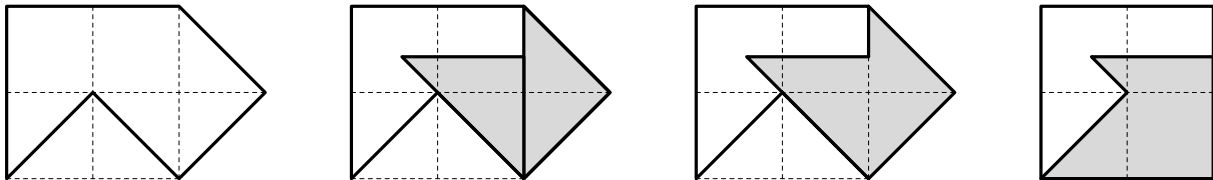
Ответ: 54° .

Решение. Все углы правильного пятиугольника равны 108° . Поскольку $EL = EK$, треугольник EKL равнобедренный, и, следовательно, $\angle ELK = 36^\circ$. Треугольник EBD равнобедренный ($EB = BD$); L — середина ED , поэтому $\angle BLD = 90^\circ$, а LM — медиана из прямого угла, откуда $LM = MD$ и $\angle MLD = \angle MDL = 72^\circ$, а следовательно, $\angle LMD = 36^\circ$. Нетрудно убедиться, что $KB = KD$ (так как $\triangle KAB = \triangle KED$), значит, KM — серединный перпендикуляр к отрезку BD . Тогда $\angle KMD = 90^\circ$, откуда $\angle KML = 54^\circ$.



Задача 4-6. Влад вырезал из листа бумаги причудливую фигуру и с удивлением обнаружил, что её можно разрезать на две части, из которых затем легко складывается квадрат (см. рисунок). Найдите другой способ разрезать эту же фигуру на две части, чтобы из них тоже можно было сложить квадрат.

Решение. Пример изображён на рис. (важно, что режем не по клеточкам).



Задача 5-5. Целые числа a, b, c таковы, что

$$ab + c = 20, \quad bc + a = 26, \quad ca + b = 526.$$

Найдите значение выражения $ab + bc + ca$.

Ответ: 620.

Решение. Сложим первые два равенства: $ab + c + bc + a = (b+1)(a+c) = 46 = 2 \cdot 23$. Значит, $b+1$ может принимать значения $\pm 1, \pm 2, \pm 23, \pm 46$, а b соответственно $-2, 0, -3, 1, -24, 22, -47, 45$. Теперь вычтем второе равенство из первого: $bc + a - ab - c = (b-1)(c-a) = 6 = 2 \cdot 3$, откуда $b-1$ может быть $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$, а b соответственно $0, 2, -1, 3, -2, 4, -5, 7$.

Из двух наборов совпадают только $b = 0$ и $b = -2$. При $b = 0$ получаем $a + c = 46$, $c - a = -6$, откуда $a = 26$, $c = 20$, но $ca + b = 20 \cdot 26 + 0 = 520 \neq 526$ — не подходит. При $b = -2$ имеем $a + c = -46$, $c - a = -2$, откуда $a = -22$, $c = -24$. Проверка: $ab + c = (-22)(-2) - 24 = 44 - 24 = 20$, $bc + a = (-2)(-24) - 22 = 48 - 22 = 26$, $ca + b = (-24)(-22) - 2 = 528 - 2 = 526$. Искомое значение:

$$\begin{aligned} ab + bc + ca &= (ab + c) + (bc + a) + (ca + b) - (a + b + c) \\ &= 20 + 26 + 526 - (-22 - 2 - 24) = 572 + 48 = 620. \end{aligned}$$

Задача 5-6. Пусть T , $Ю$ и M различные ненулевые числа, такие что

$$T + \frac{1}{Ю} = Ю + \frac{1}{M} = M + \frac{1}{T}.$$

Найдите значение $|T \cdot Ю \cdot M|$.

Ответ: 1.

Решение. Из данных условий следует, что

$$T - Ю = \frac{Ю - M}{Ю \cdot M}, \quad Ю - M = \frac{M - T}{M \cdot T}, \quad M - T = \frac{T - Ю}{T \cdot Ю}.$$

Перемножая эти равенства, получаем

$$(T - Ю)(Ю - M)(M - T) = \frac{(T - Ю)(Ю - M)(M - T)}{(T \cdot Ю \cdot M)^2},$$

откуда $(T \cdot Ю \cdot M)^2 = 1$, и, следовательно, $|T \cdot Ю \cdot M| = 1$.

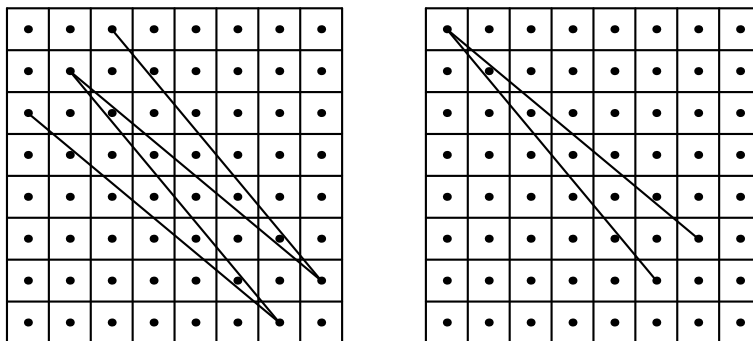
Задача 6-6. *Квагга* — это вымершая шахматная фигура, ход которой похож на ход коня, но гораздо длиннее: она может переместиться на 6 клеток в любом направлении (вверх, вниз, влево или вправо), а затем на 5 клеток в перпендикулярном направлении. Найдите количество способов расставить 51 кваггу на шахматной доске 8×8 так, чтобы ни одна квагга не атаковала другую. (Поскольку квагги от природы воинственные создания, считается, что квагга атакует квагг на любых полях, на которые она может переместиться, а также любых других квагг, находящихся на том же поле.)

Ответ: 68.

Решение. Представим 64 клетки доски как вершины графа и соединим две вершины ребром, если квагга может перейти с одной клетки на другую. Полученный граф состоит из 4 путей длины 5, 4 путей длины 3 (задаваемых четырьмя поворотами двух показанных на следующем рисунке путей) и 32 изолированных вершин. Каждый путь длины 5 может вместить не более 3 не атакующих друг друга квагг, и притом единственным способом (первая, средняя и последняя вершины). Каждый путь длины 3 может вместить не более 2 неатакующих квагг, также единственным способом. Следовательно, максимальное общее число неатакующих квагг равно $4 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 32 = 52$. Чтобы разместить 51 кваггу, ровно одна компонента графа должна содержать на одну кваггу меньше своего максимума.

Если эта компонента — путь длины 5, то существует $C_5^2 - 4 = 6$ способов разместить двух квагг на несмежных вершинах, а все остальные позиции определяются однозначно;

4 таких пути дают $4 \cdot 6 = 24$ варианта. Если это путь длины 3, то существует 3 способа разместить одну кваггу, а остальная доска заполняется однозначно, что даёт $4 \cdot 3 = 12$ вариантов. Наконец, если это одна из 32 изолированных вершин, мы просто оставляем эту клетку пустой, а остальная доска заполняется однозначно, что даёт 32 варианта. Итого получаем $24 + 12 + 32 = 68$ различных расстановок.

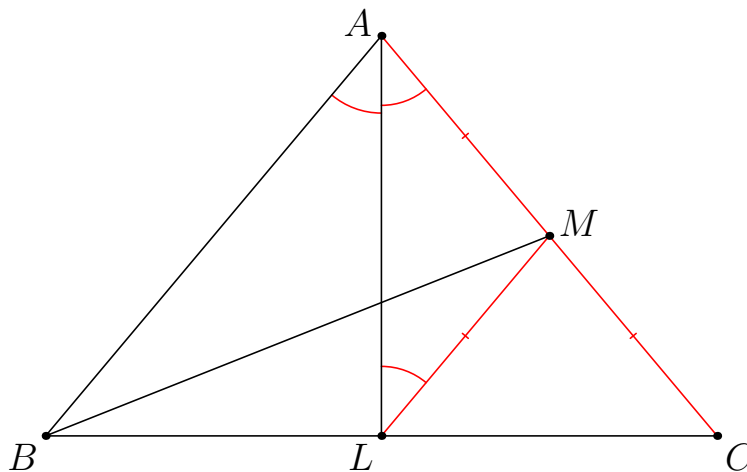


§4.4.2 Пенальти

Задача 1. В треугольнике ABC провели медиану BM и биссектрису AL так, что ML параллельно AB . Найдите углы треугольника, если $\angle CLM = 50^\circ$.

Ответ: $(80^\circ, 50^\circ, 50^\circ)$.

Решение. Так как $ML \parallel AB$, то $\angle BAL = \angle MLA$ (накрест лежащие). Следовательно, $AM = LM$, поскольку $\angle MLA = \angle BAL = \angle CAL$, то есть треугольник AML равнобедренный с основанием AL . Тогда в треугольнике ALC медиана LM равна половине стороны AC , а значит, по обратной теореме о медиане в прямоугольном треугольнике, треугольник ALC — прямоугольный с прямым углом при вершине L , то есть $\angle ALC = 90^\circ$. Отсюда следует, что в треугольнике ABC биссектриса AL является также высотой и медианой, поэтому треугольник ABC равнобедренный: $AB = AC$ и $\angle ABC = \angle ACB$. Далее, так как $LM = MC$ (медиана равна половине гипотенузы), треугольник LMC равнобедренный, и $\angle CLM = \angle MCL = \angle ACB = 50^\circ$. Следовательно, $\angle ABC = \angle ACB = 50^\circ$, а $\angle BAC = 180^\circ - 2 \cdot 50^\circ = 80^\circ$.



Задача 2. Известно, что $T + Ю + M + 7 + 2 = 20$ и $T \cdot Ю + Ю \cdot M + M \cdot T = 10$. Найдите значение выражения $T^2 + Ю^2 + M^2$.

Ответ: 101.

Решение. Так как $(T + Ю + M)^2 = T^2 + Ю^2 + M^2 + 2(T \cdot Ю + Ю \cdot M + M \cdot T)$, то

$$T^2 + Ю^2 + M^2 = (T + Ю + M)^2 - 2(T \cdot Ю + Ю \cdot M + M \cdot T) = 11^2 - 2 \cdot 10 = 101.$$

Задача 3. Пусть $T, Ю, M, E, H, Б$ — различные целые числа от 1 до 9 включительно, удовлетворяющие условию $T \cdot Ю = M \cdot E = H + Б$. Найдите возможное значение суммы $T + Ю + M + E + H + Б$.

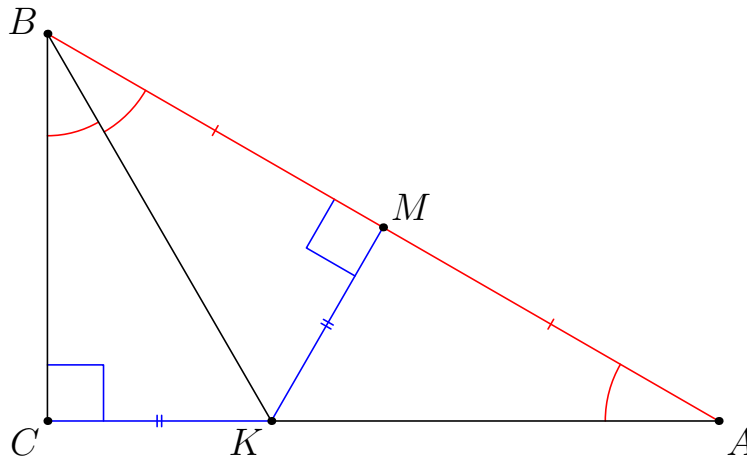
Ответ: 23, 27.

Решение. Понятно, что $H + Б \leq 9 + 8 = 17$. Легко видеть, что среди натуральных чисел от 1 до 17 только числа 6, 8 и 12 раскладываются двумя различными способами на пару однозначных множителей. Рассмотрим каждый случай. Если $H + Б = 6 = 1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$, то минимальная сумма оставшихся однозначных чисел равна $4 + 5 > 9$, что не подходит. Если $H + Б = 8 = 1 \cdot 8 = 2 \cdot 4$, то среди оставшихся однозначных чисел можно подобрать пару с нужной суммой: $3 + 5 = 8$. Тогда $T + Ю + M + E + H + Б = 1 + 8 + 2 + 4 + 3 + 5 = 23$. Если $H + Б = 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$, то подходит пара $5 + 7 = 12$, и сумма равна $2 + 6 + 3 + 4 + 5 + 7 = 27$. Таким образом, искомая сумма может быть равна 23 или 27.

Задача 4. В прямоугольном треугольнике один из углов равен 30° . Найдите отношение большего катета и отрезка перпендикуляра, проведённого к гипотенузе через её середину до пересечения с катетом.

Ответ: 3.

Решение. Пусть ABC — прямоугольный треугольник с $\angle A = 30^\circ$, $\angle C = 90^\circ$, AB — гипотенуза, M — её середина. Перпендикуляр к AB , восставленный в точке M , пересекает катет AC в точке K . Положим $KM = a$. В прямоугольном треугольнике AKM угол A равен 30° , поэтому $AK = 2a$. В треугольнике AKB отрезок KM является одновременно высотой и медианой, следовательно, треугольник AKB равнобедренный, и $\angle BAK = \angle ABK = 30^\circ$. Тогда BK — биссектриса угла CBA , так как $\angle CBK = 60^\circ - \angle ABK = 30^\circ = \angle ABK$. По свойству биссектрисы, каждая её точка равноудалена от сторон угла, поэтому $KM = KC = a$. Следовательно, $AC = AK + KC = 2a + a = 3a$, откуда $AC : KM = 3$.



Задача 5. Найдите остаток числа $2^{576} - 1$ при делении на $2^{72} + 1$.

Ответ: 0.

Решение. Применим несколько раз формулу разности квадратов:

$$\begin{aligned} 2^{576} - 1 &= (2^{288} - 1)(2^{288} + 1) \\ &= (2^{144} - 1)(2^{144} + 1)(2^{288} + 1) \end{aligned}$$

$$= (2^{72} - 1)(2^{72} + 1)(2^{144} + 1)(2^{288} + 1).$$

Понятно, что тогда $2^{576} - 1$ делится на $2^{72} + 1$, а значит, остаток равен 0.

Задача 6. Учитель составляет дробь, используя числа от 1 до 13 включительно. Он записывает некоторые из них в числитель, ставя между ними знак умножения. Затем оставшиеся числа он записывает в знаменатель, также ставя между ними знак умножения. В числителе и знаменателе есть хотя бы по одному числу. Учитель гарантирует, что дробь равна наименьшему её возможному натуральному значению. Чему равно это натуральное число?

Ответ: 3003.

Решение. Произведение всех чисел равно $13!$. Чтобы дробь была натуральной, в знаменателе должны остаться только простые, входящие в $13!$ в нечётной степени. В $13!$ степени 7, 11, 13 нечётны (равны 1), степень 3 нечётна (равна 5). Значит, наименьшее возможное натуральное значение — $3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 3003$. Данное значение достигается, к примеру, при таком числителе и знаменателе:

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 12} = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 3003.$$

Задача 7. На доске написаны три неотрицательных целых числа. На каждом шаге тройка чисел $(T, Ю, М)$ заменяется на $(T + Ю, Ю + М, М + T)$. Найдите наибольшее количество шагов, после которых на доске может появиться число 72.

Ответ: 5.

Решение. Заметим, что после каждого хода наименьшее из трёх чисел увеличивается не менее чем вдвое (так как оно становится суммой двух других, каждое из которых не меньше его самого). Следовательно, после k шагов все числа не меньше 2^k . Если $k \geq 7$, то $2^k \geq 2^7 = 128$, и любое число на доске было бы не меньше 128, что противоречит появлению 72. Значит, $k \leq 6$.

Если (a, b, c) — исходная тройка, то через 6 шагов получим тройку $(21S + a, 21S + b, 21S + c)$, где $S = a + b + c$ (достаточно выполнить вычисления вручную). Число 72 даёт остаток 9 при делении на 21, поэтому одно из чисел в тройке не меньше 9, откуда $S \geq 9$. Но $21 \cdot 9 > 72$, противоречие. Для 5 шагов имеем тройку $(11S - a, 11S - b, 11S - c)$, и подходит исходная тройка $(0, 2, 5)$.

Задача 8. Четыре жреца кладут по одной руне трёх видов в четыре углубления, образующие квадрат 2×2 . Соседние по стороне углубления не могут хранить одинаковые руны. Сколько существует способов сделать это, если каждый расклад уникален (повороты и отражения считаются разными)?

Ответ: 18.

Решение. Обозначим углубления A, B, C, D по часовой стрелке, начиная с левого верхнего.

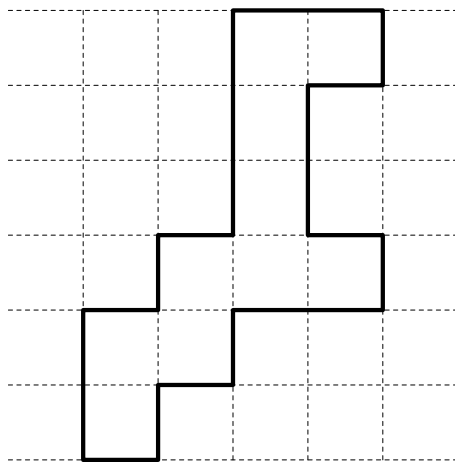
Если A и C одного цвета, то есть 3 способа выбрать цвет A ; цвет C при этом определяется однозначно. Цвета B и D выбираются независимо, что даёт ещё $2 \cdot 2 = 4$ способа. Итого $3 \cdot 4 = 12$ способов.

Если A и C разного цвета, то цвет A можно выбрать 3 способами, а цвет C — 2 способами. После этого цвета B и D определяются однозначно. Всего получаем $3 \cdot 2 = 6$ способов.

Таким образом, общее количество способов равно $12 + 6 = 18$.

Задача 9. Приведите пример такой связной фигурки из 10 клеток, что как бы мы ни поставили на клетки этой фигурки двух ферзей, они не побьют все остальные клетки фигурки.

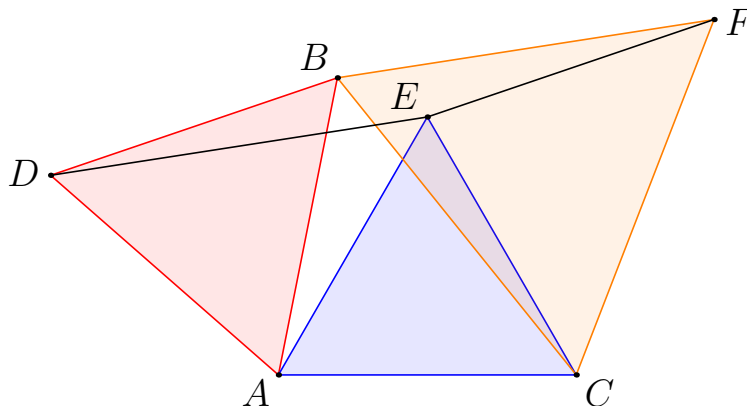
Решение. Это можно сделать, например, так:



Задача 10. Пусть треугольники ABD , ACE и BCF равносторонние, причём точки D и C лежат по разные стороны от прямой AB , точки A и F — по разные стороны от прямой BC , а точки B и E — по одну сторону от прямой AC . Если $\angle DEF = 170^\circ$, то найдите $\angle ABC$.

Ответ: 50° .

Решение. Легко видеть, что треугольники ADE , EFC и ABC равны. Действительно, $AD = AB$, $AE = AC$ и $\angle DAE = 60^\circ + \angle BAE = \angle CAB$, откуда $\triangle ADE = \triangle ABC$ по двум сторонам и углу между ними. Аналогично, $CF = BC$, $CE = AC$ и $\angle FCE = 60^\circ - \angle BCE = \angle ACB$, поэтому $\triangle EFC = \triangle ABC$. Следовательно, $\angle AED = \angle ACB$ и $\angle CEF = \angle BAC$. Тогда $\angle ABC = 180^\circ - \angle ACB - \angle BAC = 180^\circ - \angle AED - \angle CEF$. Но $\angle AED + \angle CEF = 360^\circ - \angle AEC - \angle DEF = 360^\circ - 60^\circ - 170^\circ = 130^\circ$, откуда $\angle ABC = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$.



Задача 11. Сколькими способами можно расставить несколько знаков «плюс» между цифрами числа 111111111111111 (пятнадцать единиц) так, чтобы полученная сумма делилась на 30?

Ответ: 2002.

Решение. Во-первых, итоговая сумма всегда будет делиться на 3, так как остаток числа при делении на 3 равен остатку суммы его цифр, а у нас $15 = 3 \cdot 5$ единиц. Во-вторых, для делимости на 10 необходимо, чтобы сумма последних цифр слагаемых делилась на

10, поскольку остаток числа при делении на 10 совпадает с его последней цифрой. Значит, должно быть ровно 10 слагаемых (так как $15 < 20$). Следовательно, нужно расставить 9 плюсов между единицами. Это можно сделать $C_{14}^9 = 2002$ способами (число способов расставить 9 плюсов между 15 единицами).

Задача 12. На улице в ряд стоят 100 домов. Приходит маляр и красит каждый дом в красный цвет. Затем приходит другой маляр и красит каждый третий дом (начиная с дома номер 3) в синий цвет. Затем приходит следующий маляр и красит каждый пятый дом в красный цвет (даже если он уже красный), потом следующий маляр красит каждый седьмой дом в синий цвет, и так далее, чередуя красный и синий, пока не пройдет 50 маляров. После того как всё закончится, сколько домов будут красными?

Ответ: 52.

Решение. Дом с номером n оказывается красным тогда и только тогда, когда наибольший нечётный делитель числа n имеет вид $4k + 1$ (то есть даёт остаток 1 при делении на 4). Выпишем все такие n : 25 значений вида $n = 4k + 1$; 13 значений вида $n = 2(4k + 1)$ (при $k = 0, 1, \dots, 12$); 7 значений вида $n = 4(4k + 1)$ ($k = 0, 1, \dots, 6$); 3 значения вида $n = 8(4k + 1)$ ($k = 0, 1, 2$); 2 значения вида $n = 16(4k + 1)$ ($k = 0, 1$); 1 значение вида $n = 32(4k + 1)$; и 1 значение вида $n = 64(4k + 1)$. Итого получаем $25 + 13 + 7 + 3 + 2 + 1 + 1 = 52$ красных дома.

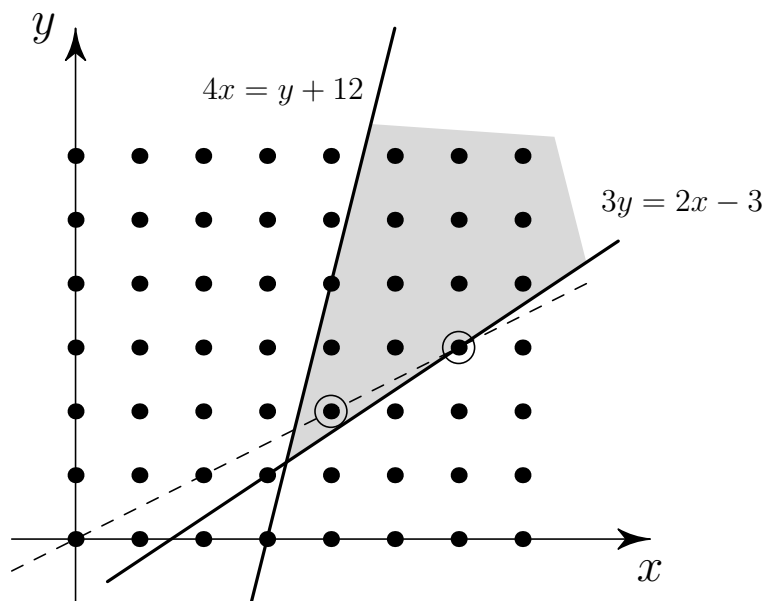
Задача 13. Пусть y и x — целые числа, удовлетворяющие неравенствам:

$$3y \geq 2x - 3 \quad \text{и} \quad 4x \geq y + 12.$$

Найдите наименьшее возможное значение $\frac{y}{x}$.

Ответ: $1/2$.

Решение. Мы просто изображаем два неравенства на координатной плоскости Oxy и находим целочисленную точку, удовлетворяющую обоим неравенствам, для которой наклон прямой, соединяющей её с началом координат, наименьший. Действительно, если $k = \frac{y}{x}$, то k — это коэффициент наклона прямой $y = kx$. Этой точкой оказывается $(4, 2)$ (или $(6, 3)$), как отмечено на рисунке. Следовательно, ответ равен $2/4 = 1/2$.



Задача 14. 11 улиточек вместе двигаются с одинаковой скоростью по прямой линии к стене. Когда улитка сталкивается со стеной, она меняет направление движения на противоположное, а когда две улитки сталкиваются друг с другом, они обе меняют направление движения. Найдите, сколько всего столкновений произойдёт до того момента, когда все улитки начнут удаляться от стены.

Ответ: 66.

Решение. Будем считать, что при встрече улитки проходят друг сквозь друга. Тогда общее число столкновений (включая удары о стену) равно

$$1 + 2 + \dots + 11 = \frac{11 \cdot 12}{2} = 66.$$

Действительно, улитка, наиболее удалённая от стены, столкнётся с 11 другими объектами, следующая за ней — с 10, и так далее, вплоть до ближайшей, которая столкнётся лишь со стеной. Столкновения после отражения от стены уже учтены в этой сумме, поскольку они совпадают со столкновениями других улиток до их удара о стену. Таким образом, все столкновения посчитаны.

Комментарий. Данное рассуждение опирается на свойство упругого столкновения одинаковых тел: при ударе они обмениваются скоростями, что с точностью до перестановки частиц эквивалентно их свободному прохождению друг сквозь друга. Поэтому подсчёт числа встреч в исходной системе совпадает с подсчётом числа пересечений в системе «проходящих» улиток.

Задача 15. Решите данное уравнение:

$$x + \frac{x}{1+2} + \frac{x}{1+2+3} + \dots + \frac{x}{1+2+3+\dots+2026} = 2026.$$

Ответ: 1013,5.

Решение. Известно, что $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ и $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Тогда

$$\frac{x}{1+2+\dots+n} = \frac{2x}{n(n+1)} = 2x \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

Значит, левую часть уравнения можно значительно упростить:

$$\begin{aligned} & x + \frac{x}{1+2} + \frac{x}{1+2+3} + \dots + \frac{x}{1+2+3+\dots+2026} \\ &= x + \frac{2x}{2 \cdot 3} + \frac{2x}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{2x}{2026 \cdot 2027} \\ &= 2x \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2026} - \frac{1}{2027} \right) \\ &= 2x \left(1 - \frac{1}{2027} \right) = 2x \cdot \frac{2026}{2027}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$x = 2026 \cdot \frac{2027}{2026 \cdot 2} = \frac{2027}{2} = 1013,5.$$

Комментарий. В решении задачи возник подсчёт суммы первых n членов одного из самых известных телескопических рядов — суммы обратных прямоугольных чисел.

Задача 16. Равносторонний треугольник ABC разбит на меньшие равносторонние треугольники отрезками, параллельными сторонам (по одному отрезку на сторону). На рисунке отмечены площади некоторых получившихся маленьких треугольников. Найдите площадь треугольника ABC .

Ответ: 121.

Решение. Легко видеть, что $LY = BF$ и $HZ = CG$. Действительно, треугольники LYF и LBF равны по общей стороне LF и двум углам: $\angle YLF = \angle BFL$ и $\angle YFL = \angle BLF$ (накрест лежащие), откуда $LY = BF$. Аналогично из равенства $\triangle ZHG = \triangle CGH$ получаем $HZ = CG$. Тогда $BC = BF + FG + GC = LY + FG + HZ = LZ + FG + HY + 2ZY$. Положим $ZY = a$ и выразим BC через a .

Равносторонний треугольник LKZ замощается $9 = 3^2$ равносторонними треугольниками площади 1, значит, его сторона LZ равна $3a$ (поскольку к каждой стороне прилегает ровно 3 маленьких треугольника со стороной a). Аналогично $HY = 2a$ (так как $S_{HJY} = 4 = 2^2$) и $FG = 4a$ (так как $S_{XFG} = 16 = 4^2$). Следовательно, $BC = 3a + 4a + 2a + 2a = 11a$. Таким образом, треугольник ABC можно разбить на 11^2 равносторонних треугольников площади 1, то есть его площадь равна $11^2 = 121$.

Комментарий. Чтобы разбить большой равносторонний треугольник на маленькие равносторонние треугольники единичной площади, достаточно разделить каждую его сторону на n равных частей и провести через точки деления прямые, параллельные сторонам. Тогда большой треугольник разобьётся на n^2 маленьких треугольников.

Замечание. При замощении мы опирались на тот факт, что площади треугольников являются точными квадратами, поэтому каждый такой треугольник можно разбить на целое число маленьких единичных треугольников.

